Zum Beweis der asymptotischen Vollständigkeit von Sigal und Soffer

Rudolf Winkel
Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik
der Freien Universität Berlin

Dezember 1987

Inhalt

Einleitung

Ende 1986 haben I.M.Sigal und A.Soffer eine umfangreiche Arbeit mit dem Titel "N-Particle Scattering Problem: Asymptotic Completeness for Short-Range Systems" vorgelegt. Das Thema der Arbeit ist also die Lösung des Problems der Asymptotischen Vollständigkeit bei der quantenmechanischen Streuung einer beliebigen (endlichen) Anzahl von Teilchen, die untereinander nur vermittels kurzreichweitiger Kräfte wechselwirken.

Dabei ist *Streuung* als Gegensatz zu Bindung zu verstehen: wenn die Teilchen des Systems nicht alle gemeinsam in einem Bindungszustand "umeinander kreisen", so können sie aneinander gestreut werden, d.h. es existieren dann zwei oder auch mehr stabile Subsysteme, die sich in die Zukunft (oder Vergangenheit) hinein "auf Nimmerwiedersehen" voneinander entfernen. Diese stabilen Subsysteme können aus einem Teilchen allein oder auch mehreren (quantenmechanisch) gebundenen Teilchen (z.B. Atome, Moleküle ...) bestehen.

Asymptotische Vollständigkeit bedeutet, daß *jeder* Zustand des Systems, der nicht Bindungszustand ist, ein Streuzustand im obigen Sinne sein muß (Vollständigkeit), in dem sich die intern gebundenen Teilsysteme asymptotisch frei, d.h. für sehr frühe oder späte Zeiten ohne wesentliche Wechselwirkung untereinander, bewegen . Die exakte mathematische Beschreibung dieses Sachverhalts, wie auch der noch folgenden anschaulichen Aussagen, können im Kapitel "Struktur des Beweises" gefunden werden.

Dieses Bild soll nun für eine beliebige Teilchenzahl N bei kurzreichweitigen Kräften gelten; als *langreichweitige* Kraft kommt im mikroskopischen Bereich "nur" die Coulomb-Kraft in Betracht, die physikalisch am interessantesten, im Rahmen der Problemstellung 'Asymptotische Vollständigkeit' aber schwieriger zu behandeln ist.

Das *Problem* besteht darin, daß die experimentelle Erfahrung das oben skizzierte Bild der zeitlichen Entwicklung eines "Nicht-Bindungszustandes" eindrücklich nahelegt, der theoretische Nachvollzug im Rahmen des formalen Grundgerüstes der Quantenmechanik jedoch bisher nicht möglich war. Der physikalischen *Realität* entspricht ja in der quantenmechanischen *Theorie* ein bestimmtes mathematisches *Modell* und es kommt darauf an, das einmal gefundene Modell auf seine Tauglichkeit zu überprüfen: zum Teil an Hand der Vorhersagen, die es macht; in erster Linie jedoch im Hinblick auf seine Übereinstimmung und Erklärungskraft gegenüber den schon bekannten Fakten. Dies letztere ist ein Ziel der *Streutheorie.*

Nachdem man etwa 20 Jahre lang mit schwerfälligen und undurchsichtigen Resolventenmethoden das Problem ohne rechten Erfolg untersucht hatte, kam es vor etwa 10 Jahren zu einer Wende in der Streutheorie durch einen "geometrischen", mit der Anschauung enger zusammenstimmenden Ansatz von V.Enss.

Durch vielfältige Forschungsanstrengungen ist das Problem der Asymptotischen Vollständigkeit mittlerweile für 2 und 3 Teilchen mit allen interessanten Wechselwirkungen gelöst, für $N \geq 4$ Teilchen liegt jedoch bis jetzt keine befriedigend allgemeine Lösung vor. (Für weitere Details zur Geschichte der Streutheorie vgl. das Vorwort von Sigal und Soffer.)

Die Arbeit von Sigal und Soffer ist nun ein bedeutender Schritt in diese Richtung. W.Hunziker und B.Simon äußerten in einem offenen Brief vom 1.9.1987 an alle interessierten Fachkollegen: "We believe that the proof is correct in the sense that both the strategy and basic tactics in the paper are sound." Andererseits bemerken sie jedoch: "... the paper is very difficult to read, not so much because of the intrinsic difficulty of the material, but because of the presentation."

Ziel der vorliegenden Diplomarbeit ist deshalb die detaillierte Rekonstruktion eines wesentlichen Teils des Beweises von Sigal und Soffer, nämlich die Ausbreitungseigenschaften des Systems im sog. Nicht-Schwellenfall. Dazu wird nach einem kurzen Kompendium der nötigen Notationen zunächst ein Überblick über die Struktur des Gesamtbeweises gegeben. Es folgt ein Kapitel, in dem verschiedene Hilfsaussagen zusammengestellt und bewiesen werden, und abschließend die Ausarbeitung des Nicht-Schwellenfalls.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof.Dr.V.Enss für sein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit und seine intensive Betreuung herzlich danken; ebenso meinem Kommilitonen Reinhard Walden für die vielen klärenden und anregenden Diskussionen.

Notation

Grundsätzlich wurden die Notationen und Aussagen, sowie die Formelnumerierungen von Sigal und Soffer soweit wie möglich übernommen, um ein leichtes Zurechtfinden bei paralleler Lektüre zu ermöglichen. Aussagen und Formeln, die nur in veränderter Form übernommen werden konnten, erhalten zusätzlich einen Strich, z.B. Theorem 6.1$'$. Zusätzliche Aussagen oder Formeln bzw. zusätzlich numerierte Formeln bekommen noch einen kleinen lateinischen Buchstaben, z.B. (A.7b) .
Für die folgenden Notationen und ihre Bedeutung findet man weitere Hinweise außer bei Sigal und Soffer selbst (Einleitung, Kapitel 1 & 2, Anfang Kapitel 6) vor allem in [RS].

F_Δ(s) glatte Fkt. auf $\mathbb{R}$, Δ beschränktes Intervall, $0 \leq F_\Delta(s) \leq 1$,

$$F_\Delta(s) = \begin{cases} 1 & ,s \in \Delta \\ 0 & ,s \notin (\inf\Delta \ - \delta \sup\Delta \ + \delta), \delta = |\Delta|/10 \end{cases}$$

P_Δ(s) $= \chi_\Delta(s)$

Weitere glatte Funktionen werden ad hoc definiert.

X	$= \{x \in \mathbb{R}^{\nu N} \mid \sum_{i=1}^N m_i x_i = 0, x_i \in \mathbb{R}^\nu\}$ *Konfigurationsraum* von N Teilchen mit den Massen m_i in ν Raumdimensionen im Schwerpunkts-Bezugssystem
$< x, y >$	$= 2\sum m_i\ x_i \cdot y_i$ Skalarprodukt auf X, $x_i \cdot y_i$ ist dabei das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^\nu$
X'	$= \{k \in \mathbb{R}^{\nu N} \mid \sum k_i = 0\}$ Dualraum von X, *Impulsraum*
$< k, u >$	$= \sum \frac{1}{2m_i} k_i \cdot m_i$ Skalarprodukt auf X'
$X \times X'$	*Phasenraum*
$< x, k >$	$= \sum x_i \cdot k_i$ Bilinearform auf $X \times X'$
a	*Clusterzerlegung*, Partition der Menge $\{1, \ldots, N\}$ in nichtleere Teilmengen, die Cluster $A_i, 1 \leq i \leq \#(a)$
#(a)	Anzahl der Cluster von a
$a \subset b$	a ist Verfeinerung von b, d.h. $\forall A_i \in a\ \exists B_j \in b : A_i \subset B_j$
a_{min}	$= \{\{1\}, \ldots, \{N\}\}, \#(a_{min}) = N$
a_{max}	$= \{1, \ldots, N\}, \#(a_{max}) = 1$
(i, j)	$= \{\{i, j\}, \{1\}, \ldots, \widehat{\{i\}}, \ldots, \widehat{\{j\}}, \ldots, \{N\}\}, \#(i, j) = N - 1$

X_a $= \{x \in X | x_i = x_j,$wenn $(i,j) \subset a\}$ Konfigurationsraum der clusterexternen Koordinaten, *"externer Raum"*, alle Relativkoordinaten innerhalb der Cluster sind auf Null gesetzt

X^a $= \{x \in X | \sum_{j \in C_i} m_j x_j = 0, \forall C_i \in a\}$ Konfigurationsraum der clusterinternen Koordinaten, *"interner Raum"*, alle relativen Koordinaten der Clusterschwerpunkte sind auf Null gesetzt

$X = X^a \oplus X_a = \{x^a\} \oplus \{x_a\}$
$X' = (X^a)' \oplus (X_a)' = \{k^a\} \oplus \{k_a\}$
p^a bzw. p_a sind die zu x^a bzw. x_a kanonisch konjugierten Impulse

p $= -i\nabla_x = -i(\partial_j)_j$ *Impulsoperator* auf X

$-\Delta$ $= |p|^2$, *Laplaceoperator* auf X (als lineare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{\nu N}$)

$<x>$ $= (1 + |x|^2)^{1/2}$

$\hat{x}$ $= x/<x>$

γ $= 1/2(\hat{x} \cdot p + p \cdot \hat{x})$

A $= 1/2(x \cdot p + p \cdot x)$, *Dilatationsoperator*

T_a $= |p_a|^2$, *Operator der kinetischen Energie der Clusterschwerpunkte*

$\mathcal{H}$ *Zustandsraum*

$\mathcal{H}^a$ $\equiv L^2(X^a)$, Zustandsraum der im Ursprung von X angehefteten nicht wechselwirkenden Cluster, *"interner Zustandsraum"*

$\mathcal{H}_a$ $\equiv L^2(X_a)$, Zustandsraum der Clusterschwerpunkte, *"externer Zustandsraum"*

H^a Hamiltonoperator auf $\mathcal{H}^a$

H_a $= H^a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T_a$, *Zerlegungs-Hamiltonoperator* auf $\mathcal{H} = \mathcal{H}^a \otimes \mathcal{H}_a$; Teilchen, die innerhalb eines Clusters von a liegen, wechselwirken miteinander, Teilchen aus verschiedenen Clustern nicht; daher bewegen sich die einzelnen Cluster von a gemäß H_a frei zueinander.

V_{ij} *Paarpotential* zwischen den Teilchen i und j in Abhängigkeit von $(x_i - x_j)$

I_a $= \sum_{(i,j)\not\subset a, i<j} V_{ij}$ Summe aller Paarpotentiale zwischen Teilchen aus verschiedenen Clustern von a

V $= \sum_{(i,j), i<j} V_{ij}$

H_a $-\Delta + \sum_{(i,j)\subset a, i<j} V_{ij}$

H $= -\Delta + V = H_a + I_a$ (voller) *Hamiltonoperator* auf $\mathcal{H}$; die von ihm erzeugte Zeitentwicklung soll analysiert werden.

α = (a,m) *Kanal* zur Zerlegung a; m ist Zählnummer eines Eigenwertes von H^a(Vielfachheiten mitgezählt)

$m(\alpha)$ = m

$a(\alpha)$ = a

$\#(\alpha)$ $= \#(a(\alpha))$

ε_α *Eigenwert von* H^a mit dem Index (a,m); *Schwellenwert* von H, falls $a \neq a_{max}$

$\mathcal{T}(H)$ $= \{\varepsilon_\alpha | \varepsilon_\alpha$ Schwellenwert eines H^a mit $\#(a) \geq 2\}$, *Schwellenmenge* von H

P_α ist Abkürzung für $P_\alpha \otimes \mathbf{1}$ auf $\mathcal{H}^a \otimes \mathcal{H}_a$, wobei P_α die Projektion auf den Eigenvektor ψ^α zum Eigenwert ε_α von H^a ist.

α heißt *offener Kanal* zu gegebener Energie E, wenn $E - \varepsilon_\alpha \geq 0$

Σ_E $= \{\pm\kappa_\alpha | \kappa_\alpha = \sqrt{E - \varepsilon_\alpha}$, falls α offener Kanal zur Energie E $\}$

γ_a $= 1/2\{\widehat{x_a} \cdot p_a + p_a \cdot \widehat{x_a}\}$ mit $\widehat{x_a} = x_a / \langle x_a \rangle$

$\mathcal{H}_\alpha$ $= L^2(X_a) = \mathcal{H}_a$ *Kanalhilbertraum*

p_α Impuls der Clusterschwerpunkte im Kanal α, $p_\alpha = p_{a(\alpha)}$

T_α kinetische Energie der Clusterschwerpunkte im Kanal α, $T_\alpha = |p_\alpha|^2$

γ_α $= \gamma_{a(\alpha)}$

H_α $= \varepsilon_\alpha + T_\alpha$, *Kanal-Hamiltonoperator* auf $\mathcal{H}_\alpha$ oder (in der natürlichen Fortsetzung) auf $\mathcal{H}$

J_α *Kanalidentifikationsoperator* von $\mathcal{H}_\alpha$ nach $\mathcal{H}$ mit $J_\alpha u = \psi^\alpha \otimes u$, ψ^α EV von H^a zum EW ε_α

S $= (a_{max}, a_2, a_3, \ldots, a_k, \alpha)$ mit $\#(a_i) = i, a_i \subset a_{i+1}$ und $a(\alpha) = a_k$, *String*

$\alpha(S)$ $= \alpha$

(In der folgenden Gruppe von Symbolen bedeutet N nicht mehr die Teilchenzahl des Systems !)

	Notation zu beliebiger Zerlegung a	Notation für $a = a_{max}$
$\varepsilon_{a,j}$	Eigenwert von H^a mit Zählnummer j (Vielfachheiten *nicht* mitgezählt)	ε_j
P_j^a	Projektor auf den Eigenraum von H^a zum Eigenwert $\varepsilon_{a,j}$	P_j
P^a	$= \sum_j P_j^a$	$P = \sum_j P_j$
$P^{a,N}$	$= \sum_{j \leq N} P_j^a$	$P^N = \sum_{j \leq N} P_j$
P_a^N	$= P^{a,N} \otimes \mathbf{1}$ auf $\mathcal{H}^a \otimes \mathcal{H}_a$	P^N auf $\mathcal{H}$
$\bar{P}_a^N$	$= \mathbf{1} - P_a^N$	$\bar{P}^N = \mathbf{1} - P^N$

$F_\Delta^N = F_\Delta \bar{P}^N$

$\mathrm{B} = O(\|x\|^{-\alpha})$	$:\Leftrightarrow$ $<x>^\beta B <x>^{\alpha-\beta}$ beschränkt f.a. $\beta \in [0, \max(\alpha, 2)]$ Das Gleichheitszeichen ist hier und in den beiden folgenden Definitionen nicht als Identität zu verstehen, sondern wie die Landau-Symbole als "$\in \{O(\|x\|^{-\alpha})\}$". Je nach Kontext kann es dann sehr wohl darauf ankommen, mit welchem Element der Menge man gerade rechnet.
$\mathrm{B} = O_1(\|x\|^{-\alpha})$	$:\Leftrightarrow$ $(H+i)^{-1}\mathrm{B}$ und $\mathrm{B}\ (H+i)^{-1}$ sind $O(\|x\|^{-\alpha})$
$\mathrm{B} = O_2(\|x\|^{-\alpha})$	$:\Leftrightarrow$ $(H+i)^{-1}\mathrm{B}\ (H+i)^{-1}$ ist $O(\|x\|^{-\alpha})$
$A \doteq B$	$:\Leftrightarrow$ $A = B + O(\|x\|^{-1-\varepsilon}), \varepsilon > 0$
$\mathrm{A} \overset{\epsilon}{=} \mathrm{B}$	$:\Leftrightarrow$ $\|A - B\| \leq \varepsilon$
$\mathrm{A} \overset{\epsilon}{\geq} \mathrm{B}$	$:\Leftrightarrow$ $\exists C, \|C\| \leq \varepsilon : A \geq B + C$

Struktur des Beweises von Sigal und Soffer

Ziel der Arbeit von Sigal und Soffer ist der Beweis von

Theorem 3.1 *Betrachte ein (quantenmechanisches) N-Teilchensystem , $N \in \mathbb{N}$ beliebig, dessen Paarpotentiale $V_{ij} : \mathbb{R}^{\nu N} \longrightarrow \mathbb{C}$ als Multiplikationsoperatoren auf $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ den folgenden Bedingungen genügen (Δ_y ist der Laplaceoperator auf $L^2(\mathbb{R}^\nu)$):*
(A) $V_{ij}(y)$ ist Δ_y-kompakt,
(B) $< y >^{1+\theta} |V_{ij}(y)|$ ist Δ_y-beschränkt für ein $\theta > 0$,
(C) $|y|^2 \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} V_{ij}(y)$ ist Δ_y-beschränkt,
(D) $V_{ij}(y) < y >^\mu$ ist Δ_y-beschränkt für ein $\mu > 1$.
Dann ist dieses System asymptotisch vollständig (s.u.).

Bem. Bedingung (A) ist hinreichend für die Selbstadjungiertheit von H auf $\mathcal{D}(-\Delta)$ für beliebiges N. (C) ist eine technische Bedingung, um die Resultate von [PSS] an geeigneter Stelle benutzen zu können. (D) und (B) sind die Bedingungen für die Kurzreichweitigkeit der Potentiale und ihrer Ableitungen (Kräfte).

Def.[RS] *Ein kurzreichweitiges N-Teilchensystem heißt* asymptotisch vollständig, *wenn die Kanalwellenoperatoren*

$$\Omega_\alpha^\pm = s - \lim_{t \longrightarrow \pm\infty} e^{iHt} J_\alpha e^{-iH_\alpha t}$$

existieren und vollständig sind, d.h.

$$\bigoplus_\alpha Ran\Omega_\alpha^\pm = \mathcal{H}^{cont}(H).$$

Bem. Das bedeutet, daß die volle Zeitentwicklung gemäß H *jedes* Streuzustandes beliebig gut durch eine Superposition geclusterter Zeitentwicklungen gemäß der H_α approximiert werden kann. Genauer: Jede Zeitentwicklung eines Streuzustandes des voll wechselwirkenden Gesamtsystems kann verstanden werden als Superposition von Zuständen, in denen sich zwei oder mehr stabile Subsysteme asymptotisch frei (für große Zeiten) bewegen. Dadurch ist eine vollständige und durchsichtige Klassifikation sämtlicher Streuzustände möglich.

Sigal und Soffer geben auch noch eine weitere Definition für asymptotische Vollständigkeit:

Def. *Ein kurzreichweitiges N-Teilchensystem heißt* asymptotisch vollständig(∗), *wenn zu jedem* $\psi \in \mathcal{H}^{cont}(H)$ *und jedem* $\varepsilon > 0$ *eine endliche Menge* $\mathcal{A}_\varepsilon$ *von Kanälen , und zu jedem* $\alpha \in \mathcal{A}_\varepsilon$ *ein Vektor* $u^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \in \mathcal{H}_\alpha$ *existiert, so daß*

$$\lim_{t \longrightarrow \pm\infty} \|e^{-iHt}\psi - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\varepsilon} J_\alpha e^{-iH_\alpha t} u^{\pm}_{\alpha,\epsilon}\| \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Proposition 2.1 *Angenommen die* $\Omega^{\pm}_{\alpha}$ *existieren. Dann sind die beiden voranstehenden Definitionen der Asymptotischen Vollständigkeit eines kurzreichweitigen N-Teilchensystems äquivalent.*

Bew. [SS] □

Def. *Das durch H charakterisierte kurzreichweitige N-Teilchensystem heißt* asymptotisch geclustert zur Energie E, *wenn ein Intervall* $\Delta \ni E$ *existiert, so daß für jedes* $\psi \in RanP_\Delta(H) \cap \mathcal{H}^{cont}(H)$ *Vektoren* $\psi^{\pm}_{a,E} \in \mathcal{H}$ *existieren, so daß*

$$\lim_{t \longrightarrow \pm\infty} \|e^{-iHt}\psi - \sum_{a} e^{-iH_a t}\psi^{\pm}_{a,E}\| = 0. \tag{2.3}$$

Die asymptotische Vollständigkeit(∗) wird nun auf die asymptotische Clusterung zurückgeführt:

Proposition 2.2′ *Das vorgelegte System und alle seine Subsysteme seien asymptotisch geclustert zu allen Energien* $E \notin (\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H))$. *Dann ist das System asymptotisch vollständig(∗).*

Bew. [SS] □

Bem. Im Gegensatz zur originalen Formulierung darf E auch nicht aus $\sigma^{pp}(H)$ sein, da in der Arbeit nur für $E \notin (\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H))$ die asymptotische Clusterung bewiesen wird. Das stellt aber für den Beweis von Prop.2.2′ keine Schwierigkeit dar, da $\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H)$ nach [PSS] eine abgeschlossene abzählbare Menge ist. Damit sind Zustände, deren Energieträger disjunkt von $\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H)$ sind, dicht in $\mathcal{H}^{cont}(H)$.

Der Beweis der asymptotischen Clusterung des Systems wird nun mit "geometrischen Methoden" geführt, d.h. für verschiedene Regionen des Phasenraums werden die Ausbreitungseigenschaften unter der vollen Zeitevolution getrennt untersucht. Im Einzelnen entwickeln Sigal und Soffer folgende Argumentation:

Def. *Für gegebene Teilchenzahl N, Energie E und genügend kleines Intervall $\Delta \ni E$ seien die* Deift-Simon Wellenoperatoren *definiert als*

$$W^{\pm}_{a,E} := s - \lim_{t \longrightarrow \pm\infty} e^{iH_a t} j_{a,E}(x,p) e^{-iHt} \tag{3.15}$$

falls der Limes auf $RanP_{\Delta}(H)$ existiert.

Dabei sind die $j_{a,E}(x,p)$ Phasenraumoperatoren einer gewissen Bauart (vgl.[SS]:(3.1),(3.2)), welche eine Partition der **1** auf dem Phasenraum mit den in Theorem 5.5 angeführten Eigenschaften bilden. Die Existenz einer derartigen Partition der **1** wird in den Kapiteln 4 und 5 der Arbeit von Sigal und Soffer nachgewiesen. (Für Details vgl.[W] .)

Die asymptotische Clusterung läßt sich leicht aus der Existenz der Deift-Simon Wellenoperatoren herleiten:

Lemma 3.6 *Existieren für jede Teilchenzahl $N \in \mathbb{N}$ die $W^{\pm}_{a,E}$ aus (3.15) auf $RanP_{\Delta}$, Δ genügend kleines Intervall mit $E \in \Delta$, dann ist das System asymptotisch geclustert zur Energie E.*
Bew. [SS] □

Bem. Die in Prop.2.2′ geforderte asymptotische Clusterung nicht nur des Systems selbst, sondern auch aller Subsysteme, ist gewährleistet, da der Beweis für beliebige Teilchenzahl N geführt wird.

Eine zentrale Stellung im Beweis von Sigal und Soffer nimmt die Eigenschaft (E) ein:

(E) *Sei $E \notin (\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H))$ fest gewählte Energie. Dann existiert ein Intervall $\Delta \ni E$, so daß f.a. $\psi \in RanP_{\Delta}$ gilt:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| j_a \frac{1}{\sqrt{<x>}} e^{-iHt} \psi \|^2 dt \leq C \|\psi\|^2$$

für ein $C < \infty$ unabhängig von ψ.
Die j_a sind dabei die Phasenraumoperatoren aus Theorem 5.5(iii) mit Träger in der Menge (5.25):

$$\{dist(\hat{x} \cdot k, \Sigma_E) \geq \delta_0\} \cup \bigcup_{\kappa \in \widetilde{\Sigma_E}} (\Omega_{a,\kappa} \cap \{|\hat{x} \cdot k - \kappa| < \varepsilon_o\}) \subset X \times X'. \quad \mathbf{(5.25)}$$

Die Bedeutung der Menge (5.25) wird unten genauer besprochen.

Hat man einmal die Eigenschaft (E) gezeigt, dann folgt die Existenz der $W^{\pm}_{a,E}$ gemäß

Proposition 3.7 *Angenommen die Eigenschaften (A)-(E) gelten und es ist $E \notin (\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H))$. Dann existiert ein (kleines) Intervall $\Delta \ni E$, $\Delta \cap (\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H)) = \emptyset$, so daß die Operatoren $W^{\pm}_{a,E}$ auf $RanP_\Delta(H)$ existieren.*

Bew. [SS],[W] □

Der Beweis der asymptotischen Vollständigkeit eines kurzreichweitigen N-Teilchensystems konzentriert sich mithin auf den Nachweis der Eigenschaft (E).

Um die Bedeutung der Eigenschaft (E) würdigen zu können, ist es nützlich, ihren Inhalt genauer zu verstehen.

Def. *Zu gegebener Energie E heißt $M_E \subset X \times X'$* Ausbreitungsmenge zur Energie E, *wenn für jeden Phasenraumoperator J mit $supp\ J \cap M_E = \emptyset$ ein Intervall $\Delta \ni E$ existiert, so daß f.a. $\psi \in RanP_\Delta$ gilt:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ||J \frac{1}{\sqrt{<x>}} e^{-iHt}\psi||^2 dt \leq C||\psi||^2 \quad \mathbf{(3.6)}$$

für ein $C < \infty$ unabhängig von ψ.

Bem. Betrachtet man der Einfachheit halber auf 1 normierte Zustände ψ, dann bedeutet (3.6), daß die Zeitevolution des Systems mit der Gesamtenergie $\approx E$ einer Integrabilitätsbedingung genügt.

Ein Eigenzustand des Gesamtsystems ist bis auf einen Phasenfaktor $e^{-i\epsilon_j t}$ zeitlich konstant, also sicher nicht integrabel im Sinne von (3.6). Läßt man einmal den Phasenraumoperator J außer Acht, so bekommt man aber auch für ein sich ausbreitendes System nur einen $O(|t|^{-1})$-Abfall, der gerade nicht mehr integrabel ist. Integrabilität entsteht erst dann, wenn das System auch den Träger der J's verläßt, d.h. sich asymptotisch außerhalb aller möglichen Träger der Phasenraumoperatoren J bewegt. Dies macht die Bezeichnung von M_E als Ausbreitungsmenge zur Energie E verständlich und sinnvoll.

Sigal und Soffer definieren eine Menge $PS_E \subset X \times X'$ (vgl.[SS]:(3.5)),welche in einer zeitunabhängigen Darstellung alle Punkte des Phasenraumes umfaßt, die ein in zwei oder mehr Cluster zerfallendes N-Teilchensystem im Streuzustand zumindest asymptotisch durchläuft: die Schwerpunkte der intern quantenmechanisch gebundenen Cluster bewegen sich geradlinig und gleichförmig vom Schwerpunkt des Gesamtsystems weg bzw. auf diesen zu, wobei die im jeweiligen offenen Kanal α zur Verfügung stehende Energie $E - \varepsilon_\alpha = \kappa_\alpha^2$ auf alle möglichen Weisen auf die Bewegung der einzelnen Clusterschwerpunkte verteilt wird.

Die Menge PS_E geht nicht direkt in den Beweis ein, sondern statt dessen die Menge (5.25), von der zur Veranschaulichung in Lemma 5.7 gezeigt wird, daß sie im Komplement von PS_E liegt.

Kurz: Die Eigenschaft (E) besagt, daß PS_E Ausbreitungsmenge zur Energie E ist.

Beim Beweis der Eigenschaft (E) werden zwei Fälle unterschieden:

1. Der Nicht-Schwellenfall ([SS]: Kapitel 7): in Theorem 7.1 wird eine Gleichung vom Typ (3.6) für $J \equiv F(s)$ mit Träger in der linken Menge: $\{dist(\widehat{x} \cdot k, \Sigma_E) \geq \delta_0\}$ von (5.25) gezeigt.

2. Der Schwellenfall ([SS]: Kapitel 8): in Theorem 8.1 wird eine Gleichung vom Typ (3.6) für $J \equiv J_{a,E,\epsilon}$ (vgl.(8.9)) mit Träger in einer Teilmenge der rechten Menge von (5.25) gezeigt.

Worum geht es dabei anschaulich ?

Wenn $x || \pm k$ ist, gilt für große x : $|\widehat{x} \cdot k| \approx |k|$. $|k|$ ist der Betrag des Impulses aller Teilchen. Zu einer gegebenen Energie E sind die $\kappa \in \Sigma_E$ die überhaupt nur möglichen Werte des Impuls-Betrages der freien Bewegung der Clusterschwerpunkte gemäß H_a . Der *Nicht-Schwellenfall* bedeutet also, daß das System sich asymptotisch in der Zeit in einen Bereich des Phasenraumes hineinentwickeln muß, dem ein zulässiger Impulsbetrag entspricht. Dieses Kriterium ist allerdings noch zu grob.

Es gibt ja Punkte im Phasenraum, denen ein zulässiger Impulsbetrag entspricht , in denen das System auch die "richtige" Konfiguration aufweist, d.h. die Teilchen der einzelnen Cluster einer Zerlegung sind im Vergleich zur Gesamtgröße des Systems nahe beieinander, in denen aber trotz $|\widehat{x} \cdot k| \approx \kappa$ für ein $\kappa \in \Sigma_E$ nicht $x|| \pm k$ gilt. Diese Gebiete des Phasenraumes werden im *Schwellenfall* auch noch von der Ausbreitungsmenge zur Energie E ausgeschlossen. Theorem 5.6 zeigt sogar (vgl.[W]), daß es im Schwellenfall ausreicht, nur solche Konfigurationen zu betrachten, in denen alle Cluster einer Zerlegung zueinander einen Mindestabstand haben, der proportional zur jeweiligen Entfernung eines Clusters vom Schwerpunkt des gesamten N-Teilchensystems ist.

Da der Kern der vorliegenden Arbeit die Rekonstruktion des Beweises von Theorem 7.1 ist, soll auf dessen Struktur noch näher eingegangen werden.

In Formel (6.1) aus Theorem 6.1′ wird der Kommutator des vollen Hamiltonoperators H mit dem Dilatationsoperator $A = 1/2(x \cdot p + p \cdot x)$ von unten durch einen relativ komplizierten Ausdruck, der genügend zur Energie E offene Kanäle α umfaßt, abgeschätzt. Es gilt aber:

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{d}{dt}(e^{iHt}Ae^{-iHt}) = e^{iHt}i[H,A]e^{-iHt}.$$

Im Beweis von Theorem 7.1 wird anhand einer detaillierten Kanalanalyse auf der Grundlage von Formel (6.1) gezeigt, daß $i[H,A]$ auf Streuzuständen der Energie $\approx E$ strikt positiv ist, d.h. $e^{-iHt}\psi$ wächst im "A-Raum" mit einer gewissen Mindestgeschwindigkeit. Wegen $A \approx x \cdot p$ folgt so die Ausdehnung des geclusterten Systems.

Die damit gewonnenen Abschätzungen gewisser Kommutatoren "von unten" (das sind die Formeln (7.2) und (7.27)) werden dann mit Hilfe des nachstehenden Lemma 3.4 in die gewünschte Abschätzung "von oben" (das ist Formel (7.1) analog zu (3.6)) gebracht.

Lemma 3.4 *Sei Δein fixiertes Intervall und F ein für irgendein $n \in \mathbb{N}$ H^n-beschränkter Operator; weiter seien F_i selbstadjungierte beschränkte Operatoren, die für alle $\psi \in Ran P_\Delta(H)$ der Abschätzung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|F_i \frac{1}{\sqrt{<x>}} \psi_t\|^2 dt \leq C_1 \|\psi\|^2 \tag{3.9}$$

genügen mit einem $C_1 < \infty$ unabhängig von ψ.
Für diese Objekte gelte darüber hinaus noch die folgende Abschätzung:

$$P_\Delta i[H, F] P_\Delta \geq P_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_0^2 \frac{1}{\sqrt{<x>}} P_\Delta - \sum_i^{endl.} P_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_i^2 \frac{1}{\sqrt{<x>}} P_\Delta. \tag{3.8}$$

Dann gilt für alle $\psi \in Ran P_\Delta(H)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|F_0 \frac{1}{\sqrt{<x>}} \psi_t\|^2 dt \leq C \|\psi\|^2 \tag{3.10}$$

mit einem $C < \infty$ unabhängig von ψ.
Bew. [SS] □

Hilfsmittel

Eine Abschätzung vom Mourre-Typ

In den Abschätzungen von Theorem 6.1', Korollar 6.7' und deren Anwendungen setzen wir eine beliebige feste Teilchenzahl vorraus und benutzen den Buchstaben N als Parameter in $F_\Delta^N = F_\Delta \bar{P}^N$.

Theorem 6.1' *Sei $E \notin (\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H))$. Zu jedem $\varepsilon > 0, \delta > 0$ und Kanal α existieren dann Zahlen $\delta_0 > 0, N_{\#(\alpha)}$ und Funktionen F_α mit $0 \leq F_\alpha \leq 1$, supp $F_\alpha \subset (-\delta/2, \delta/2)$, so daß für jedes Intervall Δ mit $|\Delta| \leq \delta_0, \Delta \ni E$, und für alle $N > N_1$ die folgenden Abschätzungen gelten:*

$$F_\Delta^N i[H,A] F_\Delta^N \overset{\varepsilon}{\leq} F_\Delta^N \Big(\sum_{\substack{m(\alpha) \leq N_{\#(\alpha)} \\ E - \epsilon_\alpha \geq 0}} 2{\kappa_\alpha}^2 \phi_{\alpha,E} \Big) F_\Delta^N \tag{6.1}$$

$$(F_\Delta^N)^2 \overset{\varepsilon}{=} F_\Delta^N \Big(\sum_{\substack{m(\alpha) \leq N_{\#(\alpha)} \\ E - \epsilon_\alpha \geq 0}} \phi_{\alpha,E} \Big) F_\Delta^N \tag{6.2}$$

wobei sich die Summen über alle offenen Kanäle mit $m(\alpha) \leq N_{\#(\alpha)}$ erstrecken, und

$$\phi_{\alpha,E} := \sum_{S, \alpha(S) = \alpha} j_S F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) F_\alpha(|p_\alpha| - \kappa_\alpha) F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) j_S^*. \tag{6.3}$$

$F(s < \kappa_\alpha + \delta) = \begin{cases} 0 & , s > \kappa_\alpha + 5/4\delta \\ 1 & , s < \kappa_\alpha + 3/4\delta \end{cases}$ *ist glatte Funktion. Die j_S sind beschränkte Operatoren, definiert durch:*

$$j_S := \varphi_{a_2} \bar{P}_{a_2}^{N_2} \varphi_{a_3}^{a_2} \bar{P}_{a_3}^{N_3} \dots \varphi_{a_k}^{a_{k-1}} P_\alpha \tag{6.4}$$

*für den String $S = (a_{max}, a_2, \dots, a_k, \alpha)$, wobei die $\{\varphi_{a_{j+1}}^{a_j}\}$ eine Partition der **1** auf dem Konfigurationsraum X^{a_j} bilden (vgl.[SS]: Ende Kapitel 4, [W]).*

Bem. Die Definition von $E := \inf \Delta + \delta$ in Theorem 6.1 ist nicht sinnvoll:

1. da man für die Anwendung $E \in \Delta$ braucht, folgt $\delta_0 > \delta$; δ_0 sollte aber unabhängig von δ nur in Abhängigkeit von ε gewählt werden können;

2. da die Induktionsannahme im Beweis deutlich formuliert: "...E from the middle of the intervall Δ_1";

3. da die einzige Stelle im Beweis, wo $E = \inf\Delta + \delta$ benutzt wird widersprüchlich ist.

Bew. Theorem 6.1': [SS] □

Korollar 6.7' *Unter den selben Voraussetzungen wie in Theorem 6.1', aber zusätzlich $\varepsilon < 1$, und mit den selben Bezeichnungen gelten die Formeln:*

$$F_\Delta^N i[H,A] F_\Delta^N \leq F_\Delta^N \Big(\sum_{\substack{m(\alpha)\leq N_{\#(\alpha)} \\ E-\epsilon_\alpha \geq 0}} (2\kappa_\alpha{}^2 - \varepsilon)\phi_{\alpha,E} \Big) F_\Delta^N \tag{6.46}$$

$$(F_\Delta^N)^2 \gtrless (1 \mp \varepsilon) F_\Delta^N \Big(\sum_{\substack{m(\alpha)\leq N_{\#(\alpha)} \\ E-\epsilon_\alpha \geq 0}} \phi_{\alpha,E} \Big) F_\Delta^N. \tag{6.47}$$

Bew. Wir zeigen zunächst:

$$(F_\Delta^N)^2 < (1+\varepsilon) F_\Delta^N (\textstyle\sum \phi_\alpha) F_\Delta^N. \tag{6.47a}$$

Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich für selbstadjungierte Operatoren A und B:

$$\begin{aligned} A \overset{\varepsilon}{\geq} B &\Rightarrow A \geq B - \varepsilon\mathbf{1} \text{ und} \\ A \overset{\varepsilon}{=} B &\Rightarrow A \gtrless B \mp \varepsilon\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon' > 0$ mit $\varepsilon' \ll 1$ vorgegeben; wir wählen dazu ein beliebiges ε ,$0 < \varepsilon < 1$, so daß $\varepsilon' > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Das ist sicher möglich wegen $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = 0$. Zu diesem ε wählt man ein Intervall Δ und $N \in \mathbb{N}$ so, daß gemäß Theorem 6.1' gilt:

$$(6.2) \Rightarrow (F_\Delta^N)^2 < F_\Delta^N (\textstyle\sum \phi_\alpha) F_\Delta^N + \varepsilon\mathbf{1}.$$

Für $N' \geq N$ und geeignetes $\Delta' \subset \Delta$, so daß $F_{\Delta'}^{N'} F_\Delta = F_{\Delta'}^{N'}$, folgt:

$$\begin{aligned}
(F_{\Delta'}^{N'})^2 &< F_{\Delta'}^{N'}(\sum \phi_\alpha) F_{\Delta'}^{N'} + \varepsilon (F_{\Delta'}^{N'})^2 \Leftrightarrow \\
(F_{\Delta'}^{N'})^2 (1-\varepsilon) &< F_{\Delta'}^{N'}(\sum \phi_\alpha) F_{\Delta'}^{N'} \Rightarrow \\
(F_{\Delta'}^{N'})^2 &< (1-\varepsilon)^{-1} F_{\Delta'}^{N'}(\sum \phi_\alpha) F_{\Delta'}^{N'} < (1+\varepsilon') F_{\Delta'}^{N'}(\sum \phi_\alpha) F_{\Delta'}^{N'},
\end{aligned}$$

da $(1-\varepsilon)^{-1} < 1+\varepsilon' \Leftrightarrow \varepsilon' > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Läßt man nun die Striche an ε' und $F_{\Delta'}^{N'}$ weg, hat man (6.47a).
Die andere Teilaussage von (6.47) erhält man ganz analog, indem man zu $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' \ll 1$, ein ε wählt mit $\varepsilon' > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Nun zum Beweis von (6.46). Zu vorgelegtem $\varepsilon' \in \mathcal{R}^+$, $\varepsilon' \ll 1$, wählt man Zahlen ε ,$\widehat{\varepsilon} \in \mathcal{R}^+$, $\widehat{\varepsilon} \ll 1$, so daß $\varepsilon' = \varepsilon(1+\widehat{\varepsilon})$. Als nächstes wählt man dazu Δ ,Δ', N, N' ähnlich wie oben, so daß gilt:

$$\begin{aligned}
&(6.1) \Rightarrow \\
F_\Delta^N i[H,A] F_\Delta^N &\geq F_\Delta^N (\sum 2{\kappa_\alpha}^2 \phi_\alpha) F_\Delta^N - \varepsilon \mathbf{1} \Rightarrow \\
F_{\Delta'}^{N'} i[H,A] F_{\Delta'}^{N'} &\geq F_{\Delta'}^{N'} (\sum 2{\kappa_\alpha}^2 \phi_\alpha) F_{\Delta'}^{N'} - \varepsilon (F_{\Delta'}^{N'})^2.
\end{aligned}$$

Mit $(F_{\Delta'}^{N'})^2 < (1+\widehat{\varepsilon}) F_{\Delta'}^{N'} (\sum \phi_\alpha) F_{\Delta'}^{N'}$ folgt:

$$\begin{aligned}
F_{\Delta'}^{N'} i[H,A] F_{\Delta'}^{N'} &\geq F_{\Delta'}^{N'} (\sum 2{\kappa_\alpha}^2 \phi_\alpha) F_{\Delta'}^{N'} - \varepsilon(1+\widehat{\varepsilon}) F_{\Delta'}^{N'} (\sum \phi_\alpha) F_{\Delta'}^{N'} \\
&= F_{\Delta'}^{N'} (\sum (2{\kappa_\alpha}^2 - \varepsilon') \phi_\alpha) F_{\Delta'}^{N'}.
\end{aligned}$$

Weglassen der Striche bei ε' und $F_{\Delta'}^{N'}$ ergibt (6.46). □

Allgemeines zum Anhang bei Sigal und Soffer

Sigal und Soffer beweisen in ihrem Anhang verschiedene Aussagen über Kommutatoren selbstadjungierter Operatoren. Sie betrachten dabei glatte und (in der Regel) beschränkte Funktionen f (auf $\mathbb{R}$) dieser Operatoren, wobei die Fouriertransformierte $\hat{f}$ (im Sinne der Fouriertransformation von temperierten Distributionen) folgender Bedingung genügt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|\ |s|^n ds < \infty, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Im folgenden werden wir diese Bedingungen an f abgekürzt zitieren durch: "f genüge (A.1')".

Im Beweis von Theorem 3.1 werden nun mehrere Klassen spezieller Funktionen von selbstadjungierten Operatoren benutzt:

1. $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ bzw. $\in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Schwarzraum):
   Für diese f ist (A.1') klarerweise erfüllt, sogar für $n = 0$, da $\hat{f}(s) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. f geglättete Stufenfunktion mit C_0^∞-Ableitung:
   Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst die Heavyside-Funktion
   $H = \begin{cases} 1 & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$.

   $[\widehat{H(x)}](s) = \pi\delta(s) + i\mathcal{P}(1/s)$ ($\mathcal{P}$: Pseudofunktion, Beweis siehe [K])

   Da man für alle temperierten Distributionen mit Hilfe der Substitutionsregel leicht berechnet:

   $$[t(x-a)]^\frown(s) = e^{ias}[\widehat{t(x)}](s) \text{ für festes } a \in \mathbb{R},$$

   folgt

   $$[H(x-a)]^\frown(s) = e^{ias}(\pi\delta(s) + i\mathcal{P}(1/s)).$$

   Sei nun $J_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ein Glättungsoperator mit $supp\, J_\delta \subset \overline{U_\delta(0)}$, dann ist $[\widehat{J_\delta}](s) \equiv m(s) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, und

   $$[J_\delta * H(x-a)]^\frown(s) = m(s) \cdot e^{ias}(\pi\delta(s) + i\mathcal{P}(1/s)).$$

Ein f vom Typ $f(x) = J_\delta * H(x-a)$ genügt offenbar (A.1'), da m(s) Integrierbarkeit im Unendlichen garantiert, und der Faktor $|s|^n$ die Singularität im Ursprung beseitigt.
Eine glatte Stufenfunktion mit C_0^∞-Ableitung hat nun die Form

$$T(x) = \sum_i^{endl.} c_i H(x-a_i), \; c_i, \; a_i \in \mathbb{R}; \text{ geglättet.}$$

Aus der Linearität von Faltung und Fouriertransformation ergibt sich mit dem schon gewonnenen Resultat, daß das geglättete T(x) ebenfalls (A.1') genügt.

3. Der Beweis von Proposition 7.5 benötigt entscheidend die Gültigkeit von Formel (A.49) aus Korollar A.9 für eine Funktion des Typs

$$f(x) \equiv \phi(x) = x \cdot F(x > M) = x \cdot (J_\delta * H(x-M))$$

mit einem $M \in \mathbb{R}$ und J_δ wie oben.
Für alle temperierten Distributionen s, t gilt (vgl. [K]):

$$\begin{aligned} (D^k\, s) * t &= D^k(s*t) = s * (D^k\, t), \text{ k Multiindex,} \\ \delta * t &= t \qquad \text{und} \\ \hat{x}(s) &= -2\pi i \delta'(s) \end{aligned}$$

Daher berechnet man (mit $k \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} [x \cdot F(x>M)]\hat{}(s) = k \cdot \{\hat{x} * [F(x>M)]\hat{}\}(s) &= \\ -k2\pi i\{\frac{d}{ds}[m(s) \cdot e^{iMs}] \cdot (\pi\delta(s) + i\mathcal{P}(1/s)) &+ \\ m(s) \cdot e^{iMs} \cdot (\pi\delta'(s) - i\mathcal{P}(1/s^2))\} & \end{aligned}$$

D.h. $\widehat{f(x)}(s)$ genügt (A.1') für $n \geq 2$.

Formel (3.17)

Für jede glatte Funktion f mit C_0^∞-Ableitung gilt:

$$O(|x|^{-\alpha})f(B) \; = \; O(|x|^{-\alpha}) \; = \; f(B)O(|x|^{-\alpha})$$

mit $B = H_a,\ p_a,\ {p_a}^2,\ \gamma_a,\ x$ (a beliebig).

Bew. Für $B = x$ ist die Behauptung klar. Lemma A.4(ii) gilt auch für p_a und liefert:

$$\begin{aligned} f(B)O(|x|^{-\alpha}) - O(|x|^{-\alpha})f(B) \quad &= \quad O(|x|^{-\alpha}), \text{ d.h.} \\ f(B)O(|x|^{-\alpha}) = O(|x|^{-\alpha}) \quad &\Leftrightarrow \quad O(|x|^{-\alpha})f(B) = O(|x|^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Wir zeigen die linke Seite:
$\langle x\rangle^\beta f(B)O(|x|^{-\alpha})\langle x\rangle^{\alpha-\beta}$ beschränkt f.a. $\beta \in [0, \max(\alpha, 2)]$:

$$\|\langle x\rangle^\beta f(B)O(|x|^{-\alpha})\langle x\rangle^{\alpha-\beta}\| \leq \|\langle x\rangle^\beta f(B)\langle x\rangle^{-\beta}\| \, \|\langle x\rangle^\beta O(|x|^{-\alpha})\langle x\rangle^{\alpha-\beta}\| < \infty,$$

falls $\|\langle x\rangle^\beta f(B)\langle x\rangle^{-\beta}\| < \infty$.
Das aber gilt, wiederum mit Lemma A.4(ii), wegen:

$$\langle x\rangle^\beta f(B)\langle x\rangle^{-\beta} = f(B) + \langle x\rangle^\beta [f(B), \langle x\rangle^{-\beta}].$$

□

Formel (A.44a)

$$[\gamma, H] = O_1(|x|^{-1}) \tag{A.44a}$$

Bew.

$$\begin{aligned}
&[\gamma, H] = [\gamma, p^2] + [\gamma, V] \\
&[\gamma, V] = \sum [\gamma, V_{ij}] \\
&[\gamma, V_{ij}] = [\hat{x} \cdot p, V_{ij}] - 1/2[[\hat{x}, p], V_{ij}] = \hat{x} \cdot [p, V_{ij}], \quad \text{da} \\
&[\hat{x}, p] = i(\nabla \hat{x}) = i \sum_j \partial_j \left(\frac{x_j}{\langle x \rangle}\right) = i \frac{1}{\langle x \rangle} \sum_j \left(1 - \frac{x_j^2}{\langle x \rangle^2}\right) = \\
&\frac{i}{\langle x \rangle}\left(n - \frac{\langle x \rangle^2 - 1}{\langle x \rangle^2}\right) = O(|x|^{-1}) \quad \text{Multiplikationsoperator} .
\end{aligned}$$

Für ein festes Paar von Teilchen (i, j) läßt sich bei geeigneter Koordinatenwahl x als $(x_{ij}, \bar{x})$ schreiben, wobei $x_{ij} \in \mathbb{R}^\nu$ die Relativkoordinate vom Teilchen j zum Teilchen i und $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\nu(N-2)}$ ist; entsprechend $p = (-i\nabla_{ij}, \bar{p})$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
&\hat{x} \cdot [p, V_{ij}(x_{ij})] = \frac{x_{ij}}{\langle x \rangle} \cdot (-i)(\nabla_{ij} V_{ij}) + \frac{\bar{x}}{\langle x \rangle} \cdot [\bar{p}, V_{ij}] = \\
&\frac{1}{\langle x \rangle}(x_{ij} \cdot (-i)(\nabla_{ij} V_{ij})) \equiv \frac{1}{\langle x \rangle} B(x_{ij}) \quad ,B_{ij} \text{ beschränkter Mult.op.} .
\end{aligned}$$

Also: $[\gamma, V] = O(|x|^{-1})$ Mult.op. .

$$\begin{aligned}
&[\gamma, p^2] = [\hat{x} \cdot p, p^2] - 1/2[[\hat{x}, p], p^2] = [\hat{x}, p^2] \cdot p + O_1(|x|^{-2}) \\
&[\hat{x}, p^2] = \left(\left[\frac{x_k}{\langle x \rangle}, p^2\right]\right)_k = (2i\nabla(\hat{x}_k) \cdot p + \Delta \hat{x}_k)_k \quad \text{und} \\
&\nabla(\hat{x}_k) = \left(\nabla_l\left(\frac{x_k}{\langle x \rangle}\right)\right)_l = \left(\frac{\delta_{kl}\langle x \rangle - x_k \nabla_l \langle x \rangle}{\langle x \rangle^2}\right)_l = \\
&\left(\frac{1}{\langle x \rangle}\left(\delta_{kl} - \frac{x_k \cdot |x_l|}{\langle x \rangle^2}\right)\right)_l = O(|x|^{-1}) \quad \text{Mult.op.} .
\end{aligned}$$

Man kann dann weiter berechnen, daß $\Delta \hat{x}_k = O(|x|^{-2})$ Mult.op. ist.

Wir erhalten damit: $[\hat{x}, p^2]$ komponentenweise $= O_1(|x|^{-1})$, wobei nur ein p-Faktor regularisiert werden muß; demnach ist $[\hat{x}, p^2] \cdot p$ bzw. $p \cdot [\hat{x}, p^2]$ gleich $O_1(|x|^{-1})$, womit alles gezeigt ist.

Formel (A.47)

$$[\gamma,[\gamma,(H+n)^{-1}]] = O(|x|^{-2}) \qquad \textbf{(A.47)}$$

Bew.

$$\begin{aligned}
&[\gamma,[\gamma,(H+n)^{-1}]] \;=\\
&-[\gamma,(H+n)^{-1}[\gamma,H](H+n)^{-1}] \;=\\
&-(H+n)^{-1}[\gamma,[\gamma,H](H+n)^{-1}] - [\gamma,(H+n)^{-1}]\cdot[\gamma,H](H+n)^{-1} \;=\\
&-(H+n)^{-1}[\gamma,[\gamma,H]\,](H+n)^{-1} - (H+n)^{-1}[\gamma,H]\,[\gamma,(H+n)^{-1}] +\\
&+O(|x|^{-2}) \;=\\
&-(H+n)^{-1}[\gamma,[\gamma,H]\,](H+n)^{-1} + O(|x|^{-2})
\end{aligned}$$

unter Benutzung von (A.44a).

$$\begin{aligned}
[\gamma,[\gamma,H]\,] &= [\widehat{x}\cdot p,[\gamma,H]\,] - 1/2[\,[\widehat{x};p],[\gamma,H]\,]\\
&= [\widehat{x}\cdot p,[\gamma,H]\,] + O_1(|x|^{-2}) \text{ mit (A.44a).}\\
[\widehat{x}\cdot p,[\gamma,H]\,] &= \widehat{x}\cdot[p,[\gamma,H]] + [\widehat{x},[\gamma,H]]\cdot p
\end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis von (A.44a):

$$[\gamma,H] = [\widehat{x},p^2]\cdot p + O_1(|x|^{-2}) + \sum_{(i,j)} \frac{B_{ij}}{<x>}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
[\widehat{x}\cdot p,[\gamma,H]] &= \widehat{x}\cdot[p,[\widehat{x},p^2]\cdot p] + [\widehat{x},[\widehat{x},p^2]\cdot p]\cdot p] +\\
&\quad \widehat{x}\cdot[p,O_1(|x|^{-2})] + \sum_{(i,j)} \widehat{x}\cdot[p,\frac{B_{ij}}{<x>}]
\end{aligned}$$

Der 3.Summand ist unmittelbar als $O_2(|x|^{-2})$ zu erkennen; für den 4. berechnet man mit den Bezeichnungen aus (A.44a):

$$\begin{aligned}
[p,(\tfrac{B_{ij}}{<x>})] &= (-i)\nabla(\tfrac{B_{ij}}{<x>}) = (-i)\begin{pmatrix}\nabla_{ij}(\frac{B_{ij}}{<x>})\\ \overline{\nabla}(\frac{B_{ij}}{<x>})\end{pmatrix} =\\
&\quad (-i)\begin{pmatrix}((\nabla_{ij}B_{ij})<x> - B_{ij}(\nabla_{ij}<x>))/<x>^2\\ ((\overline{\nabla}B_{ij})<x> - B_{ij}(\overline{\nabla}<x>))/<x>^2\end{pmatrix} =\\
&\quad \begin{pmatrix}O(|x_{ij}|^{-1}/<x> - O(|x|^{-2})\\ O(|x|^{-2})\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wegen

$$\nabla_{ij}\langle x\rangle = |x_{ij}|/\langle x\rangle, \qquad \overline{\nabla}\langle x\rangle = |\bar{x}|/\langle x\rangle, \quad \overline{\nabla}B_{ij} = 0,$$

$$\nabla_{ij}B_{ij} \;=\; (-i)(\nabla_{ij}V_{ij} + x_{ij}\cdot\Delta_{ij}V_{ij}) \;=\; O(|x_{ij}|^{-1}.$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned}
\widehat{x}\cdot\sum_{(i,j)}[p,(\tfrac{B_{ij}}{\langle x\rangle})] &= \widehat{x}\cdot(O(|x|^{-2}))_k = O(|x|^{-2}) \quad \text{, da} \\
\frac{1}{\langle x\rangle}\cdot\sum_{(i,j)}O(|x_{ij}|^{-1} &= O(|x|^{-2}) \quad \text{(Abfall in allen Koordinatenrichtungen).}
\end{aligned}$$

Es bleiben noch die beiden ersten Summanden zu prüfen:

$$\begin{aligned}
[\widehat{x},p^2]\cdot p &= (2i(\nabla_l(\widehat{x}_k))_l\cdot p + \Delta(\widehat{x}_k))_k\cdot p = \\
&= \sum_k(2i)[\sum_l(\nabla_l(\widehat{x}_k))_l\cdot p_l]_k\cdot p_k + \sum_k(\Delta(\widehat{x}_k))_k\cdot p_k \\
&= \sum_{l,k}O_{lk}(|x|^{-1})\nabla_l\nabla_k + \sum_k O_k(|x|^{-2})\nabla_k
\end{aligned}$$

mit naheliegenden Abkürzungen. Damit berechnet man:

$$\begin{aligned}
[p,[\widehat{x},p^2]\cdot p] &= \sum_{l,k}[p,O_{lk}(|x|^{-1})]\nabla_l\nabla_k + \sum_k[p,O_k(|x|^{-2})]\nabla_k \\
&= (O_1(|x|^{-2}))_j \quad \text{und} \\
[\widehat{x},[\widehat{x},p^2]\cdot p] &= \sum_{l,k}O_{lk}(|x|^{-1})[\widehat{x},\nabla_l\nabla_k] + \sum_k O_k(|x|^{-2})[\widehat{x},\nabla_k] \\
&= (O_1(|x|^{-2}))_j.
\end{aligned}$$

Damit ist $[\widehat{x}\cdot p,[\gamma,H]] = O_2(|x|^{-2})$ und es gilt (A.47).

□

Lemma A.2a

Lemma A.2a *f genüge (A.1′). Wenn für einen beschränkten selbstadjungierten Operator B $[\gamma, B] = O(|x|^{-\alpha})$ für $\alpha \in (0,2]$ gilt, dann folgt: $[f(\gamma), H] = O(|x|^{-\alpha})$.*

Lemma A.2 *f genüge (A.1′). Dann gilt: $[f(\gamma), (H+n)^{-1}] = O(|x|^{-1})$.*
Bew. $[\gamma, (H+n)^{-1}] = O(|x|^{-1})$ nach (A.44a). Lemma A.2a

□

Bew. Lemma A.2a Für einen selbstadjungierten Operator C und $\alpha \in \mathbb{R}$ rechnet man formal:

$$[e^{iCt}, <x>^{-\alpha}] \;=\; <x>^{-\alpha}[<x>^{\alpha}, e^{iCt}]<x>^{-\alpha} \qquad \textbf{(A.8a)}$$

$$\begin{aligned}[<x>^{\alpha}, e^{iCt}] &= e^{iCt}(e^{-iCt}<x>^{\alpha}e^{iCt} - <x>^{\alpha}) \overset{(A.4)}{=} \\ &= e^{iCt}(-i\int_0^t ds\; e^{-iCt}[C, <x>^{\alpha}]e^{iCs}) = \\ &= i\int_0^t ds\; e^{iC(t-s)}[<x>^{\alpha}, C]e^{iCs} \qquad \textbf{(A.9a)}\end{aligned}$$

Für $\alpha \in (0,1]$ ist:

$$\begin{aligned}[<x>^{\alpha}, \gamma] &= [<x>^{\alpha}, \hat{x}\cdot p] - 1/2[<x>^{\alpha}, [\hat{x}, p]] \;=\; \hat{x}\cdot[<x>^{\alpha}, p] \\ &= (-i)\hat{x}\cdot(\nabla <x>^{\alpha}) \;=\; (-i)\sum_j \frac{x_j}{<x>}(\partial_j(1+|x|^2)^{\alpha/2}) \\ &= (-i)\alpha\sum_j \frac{x_j^2}{<x>}<x>^{\alpha-2} \;=\; -i\alpha(\frac{<x>^2-1}{<x>^2})<x>^{\alpha-1} \;= \\ & \qquad O(|x|^{\alpha-1}) \qquad \textbf{(A.13)}\end{aligned}$$

beschränkter Multiplikationsoperator.
Für $\alpha \in (0,1]$ ist die linke Seite von (A.8a), für $C = \gamma$ die rechte Seite von (A.9a) nach Ergebnis (A.13) beschränkt. Die formalen Manipulationen dort

lassen sich deshalb über quadratische Formen rechtfertigen und man erhält für $\alpha \in (0,1]$:

$$\|<x>^\alpha[e^{i\gamma t}, <x>^{-\alpha}]<x>^\alpha\| \overset{(A.8a)}{=} \|\, [<x>^\alpha, e^{i\gamma t}]\, \| \overset{(A.9a)}{=}$$
$$\|\int_0^t ds\ e^{i\gamma(t-s)}[<x>^\alpha, \gamma]e^{i\gamma s}\| \quad \leq$$

$$\leq \int_0^{|t|} ds\ \|e^{i\gamma(t-s)}\|\ \|[<x>^\alpha, \gamma]\|\ \|e^{i\gamma s}\| \overset{(A.13)}{=} C|t| \qquad \textbf{(A.14)}$$

Wenn die linke Seite von (A.14) für alle $t \in \mathbb{R}$ durch $C|t|$ beschränkt ist, dann gilt - wegen $<x>^\alpha$ unbeschränkt - erst recht:

$$\|<x>^\alpha[e^{i\gamma t}, <x>^{-\alpha}]\,\| \ \leq\ C|t|$$

$$\|\,[e^{i\gamma t}, <x>^{-\alpha}]<x>^\alpha\| \ \leq\ C|t| \qquad \textbf{(A.14a)}$$

Es folgt:

$$C|t| \ \geq\ \|\,[e^{i\gamma t}, <x>^{-\alpha}]<x>^\alpha\| = \|\,[<x>^{-\alpha}, e^{i\gamma t}]<x>^\alpha\| \ \geq$$
$$\|<x>^{-\alpha}e^{i\gamma t}<x>^\alpha\| - \|e^{i\gamma t}\|,$$

d.h. für geeignetes $C \geq 1$:

$$\|<x>^\alpha e^{i\gamma t}<x>^{-\alpha}\| \ \leq\ C(1+|t|) \quad \text{und analog}$$

$$\|<x>^{-\alpha}e^{i\gamma t}<x>^\alpha\| \ \leq\ C(1+|t|) \qquad \textbf{(A.7a)}$$

Ähnliche Schritte vollziehen wir nun auch für $\tilde{\alpha} := 1+\alpha \in (1,2]$:

$$\|<x>^{\tilde{\alpha}}[e^{i\gamma t}, <x>^{-\tilde{\alpha}}]\,\| \overset{(A.8a)}{=} \|\,[<x>^{\tilde{\alpha}}, e^{i\gamma t}]<x>^{-\tilde{\alpha}}\| =$$
$$\|<x>[<x>^\alpha, e^{i\gamma t}]<x>^{-\tilde{\alpha}}\| \quad + \quad \|\,[<x>, e^{i\gamma t}]<x>^{-1}\|$$

Der 2.Summand ist $\ = \|<x>[e^{i\gamma t}, <x>^{-1}]\,\| \overset{(A.14a)}{\leq} C|t|$.
Für den 1.Summanden rechnet man weiter:

$$\overset{(A.9a)}{=} \quad \|<x> \textstyle\int_0^t ds\ e^{i\gamma(t-s)}[<x>^\alpha, \gamma]e^{i\gamma s}<x>^{-\tilde{\alpha}}\| \quad \leq$$

$$\begin{array}{cr}
\| \int_0^t ds \;\; e^{i\gamma(t-s)}<x>[<x>^\alpha,\gamma]e^{i\gamma s}<x>^{-\tilde{\alpha}}\| & + \\
\| \int_0^t ds \;\; [<x>, e^{i\gamma(t-s)}]\,[<x>^\alpha,\gamma]e^{i\gamma s}<x>^{-\tilde{\alpha}}\| & \leq \\
\int_0^{|t|} ds \;\; \|<x>[<x>^\alpha,\gamma]<x>^{-\alpha}\| \; \|<x>^\alpha e^{i\gamma s}<x>^{-\alpha}\| \; \|<x>^{-1}\| & + \\
\int_0^{|t|} ds \;\; \|<x>[e^{i\gamma(t-s)},<x>^{-1}]<x>\| \; \|[<x>^\alpha,\gamma]<x>^{-\alpha}\| & \times \\
\times \|<x>^\alpha e^{i\gamma s}<x>^{-\alpha}\| \; \|<x>^{-1}\| & \overset{(A.14),(A.7a),(A.13)}{\leq} \\
C \;\; \int_0^{|t|} ds\,[(1+|s|)+(|t-s|)\cdot(1+|s|)] & \leq \\
C(1+|t|^3) \quad \text{für geeignetes } C. &
\end{array}$$

Also:

$$\|<x>^{\tilde{\alpha}}[e^{i\gamma t},<x>^{-\tilde{\alpha}}]\,\| \;\leq\; C(1+|t|^3) \qquad \textbf{(A.14b)}$$

Aus (A.14b) folgt ähnlich wie aus (A.14a) für geeignetes C:

$$\|<x>^{\tilde{\alpha}}e^{i\gamma t}<x>^{-\tilde{\alpha}}\| \;\leq\; C(1+|t|^3+1 \;\leq\; C(1+|t|^3) \qquad \textbf{(A.7b)}$$

Insbesondere ergibt sich daraus mit (A.7a) für alle $\beta \in (0,2]$:

$$\|<x>^{\beta}e^{i\gamma t}<x>^{-\beta}\| \;\leq\; C(1+|t|^3) \qquad \textbf{(A.7c)}$$

und analog bzw. über die adjungierten Operatoren:

$$\|<x>^{-\beta}e^{i\gamma t}<x>^{\beta}\| \;\leq\; C(1+|t|^3) \qquad \textbf{(A.7c)}$$

Wir wollen nun diese Ergebnisse zur Berechnung von

$$[f(\gamma),B] \;\overset{(A.3)}{=}\; i\int_{-\infty}^{\infty} ds\; \hat{f}(s)\int_0^s du\; e^{i\gamma(s-u)}[\gamma,B]e^{i\gamma u}$$

anwenden; zunächst im Fall $\alpha \in (0,1]$: Nach Definition von $O(|x|^{-\alpha})$ muß dazu für $\beta \in [0,2]$, $\delta := \alpha - \beta$, der folgende Ausdruck untersucht werden:

$$\begin{array}{cr}
<x>^\beta \int_0^s du \;\; e^{i\gamma(s-u)}O(|x|^{-\alpha})e^{i\gamma u}<x>^\delta & = \\
\int_0^s du \;\; (<x>^\beta e^{i\gamma(s-u)}<x>^{-\beta})(<x>^\beta O(|x|^{-\alpha})<x>^\delta)<x>^{-\delta}e^{i\gamma u}<x>^\delta & = \\
\int_0^s du \;\; (<x>^\beta e^{i\gamma(s-u)}<x>^{-\beta})(<x>^\beta O(|x|^{-\alpha})<x>^\delta)e^{i\gamma u} & + \\
\int_0^s du \;\; (<x>^\beta e^{i\gamma(s-u)}<x>^{-\beta})(<x>^\beta O(|x|^{-\alpha})<x>^\delta)(<x>^{-\delta}[e^{i\gamma u},<x>^\delta]) &
\end{array}$$

Mit (A.7a), (A.7c), (A.14), (A.14a), (A.14b) und Definition von $O(|x|^{-\alpha})$ folgt für genügend großes C:

$$\begin{array}{rl} \| <x>^{\beta} \int_0^s du\ e^{i\gamma(s-u)} O(|x|^{-\alpha}) e^{i\gamma u} <x>^{\delta} \| & \leq \\ C\{\int_0^{|s|} du\ (1+|s-u|^3) + \int_0^{|s|} du\ (1+|s-u|^3)(1+|u|^3)\} & \leq \\ C\{\int_0^{|s|} du\ (1+(|s|+|u|)^3)(1+|u|^3)\} & \leq \\ C|s|(1+|s|^7) & \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\int_0^s du\ e^{i\gamma(s-u)} O(|x|^{-\alpha}) e^{i\gamma u} = |s|(1+|s|^7) O(|x|^{-\alpha}) \qquad \textbf{(A.12}'\textbf{)}$$

mit einem $O(|x|^{-\alpha})$, welches für alle $s \in \mathbb{R}$ gleichmäßig beschränkt ist. (A.12′) ergibt dann:

$$[f(\gamma), B] = \{i \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \hat{f}(s)|s|(1+|s|^7\} O(|x|^{-\alpha}) = O(|x|^{-\alpha})$$

da das Integral über s nach Vorraussetzung absolut konvergiert.

Um die Behauptung von Lemma A.2a vollständig zu beweisen, muß jetzt noch eine Variante von (A.12′) für $\tilde{\alpha} \in (1, 2]$ gezeigt werden.

$$\begin{array}{rl} \| <x>^{\beta} \int_0^s du\ e^{i\gamma(s-u)} O(|x|^{-\tilde{\alpha}}) e^{i\gamma u} <x>^{\tilde{\alpha}-\beta} \| & = \\ \| \int_0^s du\ (<x>^{\beta} e^{i\gamma(s-u)} <x>^{-\beta})\ <x>^{\beta} O(|x|^{-1}) <x>^{-\alpha} e^{i\gamma u} <x>^{\alpha} <x>^{1-\beta} \| & \overset{(A.7c)}{\leq} \\ \int_0^{|s|} du\ C(1+|s-u|^3)\{\| <x>^{\beta} O(|x|^{-1}) e^{i\gamma u} <x>^{1-\beta} & + \\ + <x>^{\beta} O(|x|^{-1}) <x>^{-\alpha} [e^{i\gamma u}, <x>^{\alpha}] <x>^{1-\beta} \|\} & \leq \\ \int_0^{|s|} du\ C(1+|s-u|^3)\{\| <x>^{-(1-\beta)} e^{i\gamma u} <x>^{1-\beta} \| & + \\ + \| <x>^{-(1-\beta)} <x>^{-\alpha} [e^{i\gamma u}, <x>^{\alpha}] <x>^{1-\beta} \|\} & \overset{(A.7a)}{\leq} \\ \int_0^{|s|} du\ C(1+|s-u|^3)\{(1+|u|) + \| <x>^{-(\tilde{\alpha}-\beta)} e^{i\gamma u} <x>^{\tilde{\alpha}-\beta} \| & + \\ + \| <x>^{-(1-\beta)} e^{i\gamma u} <x>^{1-\beta} \|\} & \overset{(A.7a),(A.7c)}{\leq} \\ \int_0^{|s|} du\ C(1+|s-u|^3)\{(1+|u|) + (1+|u|^3) + (1+|u|)\} & \leq \\ C|s|(1+|s|^7) & \end{array}$$

Der letzte Schritt ist nun klar und das Lemma A.2a ist damit vollständig bewiesen.

□

Lemma A.7

Lemma A.7 *Seien A, B selbstadjungierte Operatoren, B darüber hinaus beschränkt. f genüge (A.1'). Dann gilt:*

$$[B, f(A)] = f'(A)[B, A] + R \qquad \textbf{(A.39)}$$

mit

$$R = -\int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{f}(s) \int_0^s du \int_0^u dp\; e^{i(s-p)A}[A, [A, B]]e^{ipA} \qquad \textbf{(A.40)}$$

Die Gleichungen sind im Form-Sinn zu verstehen mit Formdomäne $\mathcal{D}(A^2)$.

Bew. Lemma A.1 liefert:

$$\begin{aligned}
&[B, f(A)] \\
&\overset{(A.3)}{=} \quad -i \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{f}(s) \int_0^s du\; e^{i(s-u)A}[A, B]e^{iuA} \\
&= \quad i \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{f}(s) e^{isA}\{ \int_0^s du\; (e^{-iuA}[B, A]e^{iuA} - [B, A]) \\
&\qquad + \int_0^s du\, [B, A]\} \\
&\overset{(A.4)}{=} \quad i \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{f}(s) e^{isA} s[B, A] \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{f}(s) e^{isA} \int_0^s du\, (-i) \int_0^u dp\; e^{ipA}[A, [B, A]]e^{ipA} = \\
f'(A)[B, A] &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{f}(s) \int_0^s du \int_0^u dp\; e^{i(s-p)A}[A, [A, B]]e^{ipA}
\end{aligned}$$

□

Korollar A.9

Korollar A.9 *Angenommen f und $f'^{\frac{1}{2}}$ genügen (A.1'); insbesondere sei dazu $f' \geq 0$. Dann gilt:*

$F_\Delta[H, f(\gamma)]F_\Delta \quad =$

$$F_\Delta f'^{\frac{1}{2}}(\gamma) F_{\Delta'}[H, \gamma] F_{\Delta'} f'^{\frac{1}{2}}(\gamma) F_\Delta + O(|x|^{-2}) \qquad \textbf{(A.49)}$$

mit Δ' so gewählt, daß $F_\Delta F_{\Delta'} = F_\Delta$. (Zur Definition von F_Δ vgl. das Kapitel "Notation" .)

Bew. Nach (A.47) ist $[\gamma, [\gamma, H]\ ] = O(|x|^{-2})$. Mit Lemma A.2a folgt deshalb für alle $\tilde{f}$, welche (A.1') genügen;

$$[\tilde{f}(\gamma), [(H+n)^{-1}, \gamma]\ ] = O(|x|^{-2})\,. \qquad \textbf{(A.50)}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
[H, f(\gamma)] &= -(H+n)[(H+n)^{-1}, f(\gamma)](H+n) \\
&\overset{(A.39)}{=} -(H+n)f'(\gamma)[(H+n)^{-1}, \gamma](H+n) - (H+n)R(H+n) \\
&= -(H+n)f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)[(H+n)^{-1}, \gamma]f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)(H+n) \\
&\quad -(H+n)f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)[f'^{\frac{1}{2}}(\gamma), [(H+n)^{-1}, \gamma]\ ](H+n) \\
&\quad -(H+n)R(H+n)\,.
\end{aligned}$$

Der 2.Summand ist wegen (A.50), (3.17) und Definition von $O_2(|x|^{-\alpha})$ gleich $O_2(|x|^{-\alpha})$; der 3.Summand wegen (A.47) und Beweis von Lemma A.2a ebenfalls gleich $O_2(|x|^{-\alpha})$.

Es ergibt sich also:

$[H, f(\gamma)]$

$$= \; -(H+n)f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)[(H+n)^{-1}, \gamma]f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)(H+n) + O_2(|x|^{-2}) \quad \textbf{(A.51)}$$

Man wähle nun Δ' entsprechend der Voraussetzung etwas größer als Δ . Aus Lemma A.5(i) folgt:

$$[F_{\Delta'}, f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)] \;=\; O(|x|^{-1})\,. \qquad \textbf{(A.52)}$$

Damit ergibt sich weiter:

$F_\Delta[H, f(\gamma)]F_\Delta$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{(A.51)}{=} && -(H+n)F_\Delta F_{\Delta'} f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)[(H+n)^{-1},\gamma]f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)F_{\Delta'}F_\Delta(H+n) \\
& && +F_\Delta O_2(|x|^{-2})F_\Delta \\
&= && -(H+n)F_\Delta f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)F_{\Delta'}[(H+n)^{-1},\gamma]f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)F_{\Delta'}F_\Delta(H+n) \\
&+ && (H+n)F_\Delta[f'^{\frac{1}{2}}(\gamma),F_{\Delta'}]\,[(H+n)^{-1},\gamma]f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)F_{\Delta'}F_\Delta(H+n) \\
& && +O(|x|^{-2})
\end{aligned}
$$

Der 2.Summand ist wegen $[(H+n)^{-1},\gamma] = O(|x|^{-1})$, (A.52) und (3.17) gleich $O(|x|^{-2})$. Nach einem weiteren analogen Schritt erhält man:

$$
\begin{aligned}
&F_\Delta[H,f(\gamma)]F_\Delta \\
&= -(H+n)F_\Delta f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)F_{\Delta'}[(H+n)^{-1},\gamma]F_{\Delta'}f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)F_\Delta(H+n)+O(|x|^{-2})\ .
\end{aligned}
$$

Wegen $[(H+n)^{-1},\gamma] = -(H+n)^{-1}[H,\gamma](H+n)^{-1}$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&F_\Delta[H,f(\gamma)]F_\Delta \\
&= F_\Delta f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)F_{\Delta'}[H,\gamma](H+n)^{-1}F_{\Delta'}f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)F_\Delta(H+n) \\
&+ (H+n)F_\Delta[f'^{\frac{1}{2}}(\gamma),(H+n)^{-1}]F_{\Delta'}[H,\gamma](H+n)^{-1}F_{\Delta'}f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)F_\Delta(H+n) \\
&+ O(|x|^{-2})\ .
\end{aligned}
$$

Der 2.Summand ist wegen $[H,\gamma] = O_1(|x|^{-1})$ (vgl.(A.44a)), Lemma A.2 und (3.17) gleich $O(|x|^{-2})$.
Nach einem weiteren analogen Schritt erhält man die Behauptung. □

Bem.

1. Offenbar ist die Behauptung von Korollar A.9 auch in der Form

   $$F_\Delta[H,f(\gamma)]F_\Delta \;=\; F_\Delta f'(\gamma)F_{\Delta'}[H,\gamma]F_\Delta + O(|x|^{-2}) \qquad \textbf{(A.49a)}$$

   richtig.

2. Für Prop.7.5 muß (A.49a) auch für Funktionen f des 3. Typ's (vgl. das Kapitel "Allgemeines zum Anhang ...") gelten.
   (A.49a) stimmt aber auch in diesem Fall , da Formel (A.50) nicht mehr benötigt wird - die $f'^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ werden ja nicht mehr kommutiert; und durch das zweifache Integrieren vor $\hat{f}(s)$ in Formel (A.40) erhält man die notwendige Nullstelle 2.Ordnung in $s=0$ zur Regularisierung der Fouriertransformierten.

Lemma A.10'

Lemma A.10' *Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.*

(i') *Sei ψ^α ein Bindungszustand von H^a zum Eigenwert ε_α und ψ^α, $\nabla\psi^\alpha \in {<}x^\alpha{>}^{-\eta} L^2(X^\alpha)$ mit $\eta = 2$, dann gilt*

$$f(\gamma)P_\alpha - P_\alpha f(\gamma_\alpha) \;=\; O(|x|^{-1}) \qquad \textbf{(A.54')}$$

(ii) *Wird kein spezieller Abfall von ψ^α im Unendlichen angenommen, so gilt*

$$f(\gamma)P_\alpha - P_\alpha f(\gamma_\alpha) \;\stackrel{\varepsilon}{=}\; O(|x|^{-1}) \qquad \textbf{(A.55)}$$

wobei $\varepsilon > 0$ beliebig (klein) sein kann und $O(|x|^{-1})$ von ε abhängt.

(iii) *Die Aussagen (i) und (ii) gelten auch dann, wenn in (A.54) und (A.55) γ an die Stelle von γ_α tritt.*

Bew. (i') Sei

$$\begin{aligned}\gamma_a &:= \tfrac{1}{2}\Big(\frac{x_a}{{<}x_a{>}}\cdot p_a + p_a\cdot\frac{x_a}{{<}x_a{>}}\Big) = \widehat{x_a}\cdot p_a + \tfrac{1}{2}[\widehat{x_a}, p_a] \\ &= \widehat{x_a}\cdot p_a + O(|x_a|^{-1}),\end{aligned}$$

und $r_a := \frac{{<}x_a{>}}{{<}x{>}}$; anlog: γ^a, r^a.
Nun ist

$$\begin{aligned}\gamma &= \hat{x}\cdot p + \tfrac{1}{2}[\hat{x}, p] = \frac{(x_a + x^a)}{{<}x{>}}\cdot(p_a + p^a) + O(|x|^{-1}) \\ &= \frac{x_a}{{<}x{>}}\cdot p_a + \frac{x^a}{{<}x{>}}\cdot p^a + O(|x|^{-1})\end{aligned}$$

Andererseits ist auch

$$\begin{aligned}r_a\gamma_a + r^a\gamma^a &= r_a\frac{x_a}{{<}x_a{>}}\cdot p_a + r_a\,O(|x_a|^{-1}) + \\ &\quad\; r^a\frac{x^a}{{<}x^a{>}}\cdot p^a + r^a\,O(|x^a|^{-1}) \\ &= \frac{x_a}{{<}x{>}}\cdot p_a + \frac{x^a}{{<}x{>}}\cdot p^a + O(|x|^{-1})\end{aligned}$$

Also:

$$\gamma = r^a\gamma^a + r_a\gamma_a + O(|x|^{-1})$$

oder

$$\gamma = r^\alpha\gamma^\alpha + r_\alpha\gamma_\alpha + O(|x|^{-1}) \qquad \textbf{(A.56)}$$

bei Betrachtung eines speziellen Kanals α.

Als nächstes zeigen wir

$$<x>^\beta \leq <x_a>^\beta + <x^a>^\beta \quad \text{für } \beta \in (-\infty, 2] \qquad \textbf{(A.56a)}$$

Wegen $<x> = (1 + |x_a + x^a|^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + |x_a|^2 + |x^a|^2)^{\frac{1}{2}}$ reicht es aus für $a, b \geq 0,\ \alpha := \beta/2 \in (-\infty, 1]$ zu zeigen:

$$(1 + a + b)^\alpha \leq (1 + a)^\alpha + (1 + b)^\alpha \qquad \textbf{(A.56b)}$$

Für $a, b = 0$ ist die Formel ebenfalls richtig. Wir wählen deshalb $b \in \mathbb{R}^+$ fest und definieren

$$f(a) := (1 + a + b)^\alpha - (1 + a)^\alpha$$

Da $\alpha \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{1}{\alpha} f'(a) = (1 + a + b)^{\alpha-1} - (1 + a)^{\alpha-1}$$

Daraus folgt wegen $\alpha - 1 < 0,\ b > 0$

$$\frac{1}{\alpha} f'(a) < 0$$

Für $\alpha \in (0, 1)$ also $f'(a) < 0$; und mit $f(0) < (1 + b)^\alpha\ \forall b \in \mathbb{R}^+$ folgt dann (A.56b) für alle $a \in \mathbb{R}_0^+$.
Für $\alpha \in (-\infty, 0)$ gilt $f'(a) > 0$; und mit $\lim_{a\to\infty} f(a) = 0 < (1 + b)^\alpha\ \forall b \in \mathbb{R}^+$ folgt dann (A.56b) für alle $a \in \mathbb{R}_0^+$.
Damit ist (A.56a) bewiesen.

Mit Hilfe von (A.56a) soll nun

$$r^\alpha\gamma^\alpha P_\alpha = O(|x|^{-1}) \qquad \textbf{(A.57')}$$

gezeigt werden. Im Beweis dieser Formel betrachten wir an geeigneter Stelle die Operatoren auf jedem Faktor des Tensorprodukts $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\alpha \otimes \mathcal{H}_\alpha$ einzeln und wenden das folgende Resultat an:

$\mathcal{H}$,$\mathcal{K}$ Hilberträume, A bzw. B beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{K}$, dann ist

$$\begin{aligned} \|A \otimes \mathbf{1}\|_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}} &= \|A\|_{\mathcal{H}} \\ \|\mathbf{1} \otimes B\|_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}} &= \|B\|_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

Nach Definition ist für die Gültigkeit von Formel (A.57′) die Beschränktheit der folgenden Norm $\forall\, \beta \in [0, 2]$ zu zeigen:

$$\|<x>^{\beta} r^\alpha \gamma^\alpha P_\alpha <x>^{1-\beta}\| \quad = \quad \|<x>^{\beta-1} <x^\alpha> \gamma^\alpha P_\alpha <x>^{1-\beta}\|.$$

Fall $\beta \in [1, 2]$: Sei $\mu := \beta - 1 \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \|<x>^\mu <x^\alpha> \gamma^\alpha P_\alpha <x>^{-\mu}\| &\overset{(A.56a)}{\leq} \\ \|<x^\alpha>^\mu <x^\alpha> \gamma^\alpha P_\alpha <x>^{-\mu}\| &+ \|<x_\alpha>^\mu <x^\alpha> \gamma^\alpha P_\alpha <x>^{-\mu}\| \end{aligned}$$

Da der Operator $<x_\alpha>^\mu$ auf $\mathcal{H}_\alpha$ wirkt, kommutiert er mit $<x^\alpha>$,γ^α und P_α ; so wird der 2.Summand $\leq \|<x^\alpha>\gamma^\alpha P_\alpha\| \; \|(\frac{<x_\alpha>}{<x>})^\mu\|$.

Mit $<x^\alpha>\gamma^\alpha \;=\; x^\alpha \cdot p^\alpha + <x^\alpha> O(|x^\alpha|^{-1})$ kann man dann beide Summanden weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \leq \; \|<x^\alpha> x^\alpha \cdot p^\alpha P_\alpha <x>^{-\mu}\| &+ \|<x^\alpha>^\mu <x^\alpha> O(|x^\alpha|^{-1}) <x>^{-\mu}\| \\ + \|x^\alpha \cdot p_\alpha P_\alpha\| &+ \|<x^\alpha> O(|x^\alpha|^{-1}) P_\alpha\|. \end{aligned}$$

Der 4.Summand ist beschränkt nach Definition; der 3. nach Voraussetzung ($\eta = 1$). Der 2.Summand ist

$$\begin{aligned} &= \|<x^\alpha>^{1+\mu} O(|x^\alpha|^{-1}) <x^\alpha>^{1-(1+\mu)} <x^\alpha>^\mu <x>^{-\mu}\| \\ &\leq C\,\|(\frac{<x^\alpha>}{<x>})^\mu\| < \infty \end{aligned}$$

Der 1.Summand ist $\leq \; \|<x^\alpha>^\mu <x^\alpha> p^\alpha P_\alpha\| \; \|<x>^{-\mu}\| \; < \; \infty$ nach Voraussetzung ($\eta = 2$).

Fall $\beta \in [0,1]$: Sei $\nu := 1-\beta \in [0,1]$.
Es reicht dann aus die Beschränktheit des adjungierten Operators zu zeigen:

$$\begin{array}{l} \|{<}x{>}^{\nu} P_\alpha \gamma^\alpha {<}x^\alpha{>}{<}x{>}^{-\nu}\| \;\leq \\ \|{<}x{>}^{\nu} P_\alpha {<}x^\alpha{>}\gamma^\alpha {<}x{>}^{-\nu}\| \;+\; \|{<}x{>}^{\nu} P_\alpha [\gamma^\alpha, {<}x^\alpha{>}]{<}x{>}^{-\nu}\| \end{array}$$

Der 2.Summand ist mit (A.13):

$$\leq \; \|{<}x{>}^{\nu} P_\alpha {<}x{>}^{-\nu}\| + \|{<}x{>}^{\nu}{<}x{>}^{-2}{<}x{>}^{-\nu}\| \; < \infty$$

Es bleibt also:

$$\begin{array}{rcl} \|{<}x{>}^{\nu} P_\alpha {<}x^\alpha{>}\gamma^\alpha {<}x{>}^{-\nu}\| & \stackrel{(A.56a)}{\leq} & \\ \|{<}x^\alpha{>}^{\nu} P_\alpha {<}x^\alpha{>}\gamma^\alpha {<}x{>}^{-\nu}\| & + & \|P_\alpha {<}x^\alpha{>}\gamma^\alpha\| \leq \\ \|{<}x^\alpha{>}^{\nu} P_\alpha x^\alpha \cdot p^\alpha {<}x{>}^{-\nu}\| & + & \|{<}x^\alpha{>}^{\nu} P_\alpha {<}x^\alpha{>} O(|x^\alpha|^{-1}){<}x{>}^{-\nu}\| + \\ \|P_\alpha x^\alpha \cdot p^\alpha\| & + & \|P_\alpha {<}x^\alpha{>} O(|x^\alpha|^{-1})\| \end{array}$$

Der 4.Summand ist beschränkt nach Definition; der 3. nach Voraussetzung ($\eta = 1$). Der 2.Summand ist

$$\leq \; \|{<}x^\alpha{>} P_\alpha {<}x^\alpha{>}^{-\nu}\| \, \|{<}x^\alpha{>}^{1+\nu} O(|x^\alpha|^{-1}){<}x^\alpha{>}^{-\nu}\| \, \|(\tfrac{{<}x^\alpha{>}}{{<}x{>}})^{\nu}\| \; < \infty$$

Der 1.Summand ist nach Voraussetzung ($\eta = 2$)

$$\leq \; \|{<}x^\alpha{>}^{\nu} \; P_\alpha x^\alpha \cdot p^\alpha\| \; < \infty.$$

Damit ist (A.57′) bewiesen.

Für Teil (iii) benötigen wir später

$$P_\alpha r^\alpha \gamma^\alpha \;=\; O(|x|^{-1}) \qquad \textbf{(A.57a)}$$

Dies zeigt man ganz ähnlich wie (A.57′).

Da γ_α auf $\mathcal{H}_\alpha$, P_α auf $\mathcal{H}^\alpha$ wirkt, kommutieren beide Operatoren und man erhält:

$$\begin{array}{rcl} (\gamma - \gamma_\alpha)P_\alpha & \stackrel{(A.56)}{=} & r^\alpha \gamma^\alpha P_\alpha + (-1 + r_\alpha)\gamma_\alpha P_\alpha + O(|x|^{-1})P_\alpha \\ & \stackrel{(A.57')}{=} & O(|x|^{-1}) + Q_\alpha \gamma_\alpha + O(|x|^{-1})P_\alpha \quad \text{mit} \end{array}$$

$$Q_\alpha \;:=\; (-1+r_\alpha)P_\alpha \;=\; O(|x|^{-1}) \qquad . \tag{A.59}$$

Um (A.59) zu zeigen, benutzen wir, daß nach (A.56a) (mit $\beta = 1$) gilt

$$|-1+r_\alpha| \;=\; |1-\frac{<x_\alpha>}{<x>}| \;=\; \frac{<x>-<x_\alpha>}{<x>} \;\leq\; \frac{<x^\alpha>}{<x>}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|<x>^\beta(r_\alpha-1)P_\alpha<x>^{1-\beta}\| \;&=\; \|<x>^{\beta-1}(<x>-<x_\alpha>)P_\alpha<x>^{1-\beta}\| \\ &\leq\; \|<x>^{\beta-1}<x^\alpha>P_\alpha<x>^{1-\beta}\| \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung erhält man dabei wie folgt:

Seien A, B beliebige Multiplikationsoperatoren und sei $\phi \in \mathcal{H}$, $\sigma \in \mathbb{R}$; dann gilt:

$$\begin{aligned} A \;&\leq\; B \Leftrightarrow \\ (\phi, A\phi) \;&\leq\; (B\phi,\phi) \Rightarrow \\ (A\phi, <x>^\sigma<x>^{-\sigma}\phi) \;&\leq\; (B<x>^\sigma\phi, <x>^{-\sigma}\phi) \Rightarrow \\ (P_\alpha A<x>^\sigma\phi, P_\alpha<x>^{-\sigma}\phi) \;&\leq\; (B<x>^\sigma\phi, P_\alpha<x>^{-\sigma}\phi) \Rightarrow \\ (\phi, <x>^\sigma AP_\alpha<x>^{-\sigma}\phi) \;&\leq\; (\phi, <x>^\sigma BP_\alpha<x>^{-\sigma}\phi) \Rightarrow \text{(vgl.[We])} \\ \|<x>^\sigma AP_\alpha<x>^{-\sigma}\| \;&\leq\; \|<x>^\sigma BP_\alpha<x>^{-\sigma}\| \end{aligned}$$

Mit denselben Methoden wie bei (A.57′) zeigt man nun

$$\|<x>^{\beta-1}<x^\alpha>P_\alpha<x>^{1-\beta}\| \;<\; \infty;$$

also (A.59).
Weiter gilt:

$$\|<x>^\beta O(|x|^{-1})P_\alpha<x>^{1-\beta}\| \;\leq\; C\,\|<x>^{\beta-1}P_\alpha<x>^{1-\beta}\| \;<\; \infty,$$

d.h. $O(|x|^{-1})P_\alpha \;=\; O(|x|^{-1})$; auch dies mit den Methoden von (A.57′).

Insgesamt erhält man also:

$$(\gamma-\gamma_\alpha)P_\alpha \;=\; O(|x|^{-1}) + Q_\alpha\gamma_\alpha \tag{A.58′}$$

Mit

$$e^{i\gamma p}(\gamma - \gamma_\alpha)e^{-i\gamma_\alpha p} \quad = \quad (-i)\frac{d}{dp}(e^{i\gamma p} \cdot e^{-i\gamma_\alpha p})$$

und unter Benutzung von (A.2) folgt dann:

$$\begin{aligned} f(\gamma) - f(\gamma_\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \hat{f}(s)\,(e^{i\gamma s} - e^{i\gamma_\alpha s}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \hat{f}(s)\,(e^{i\gamma s} \cdot e^{-i\gamma_\alpha s} - 1)e^{i\gamma_\alpha s} \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \hat{f}(s)\{\int_0^s dp\,(-i)\frac{d}{dp}(e^{i\gamma p} \cdot e^{-i\gamma_\alpha p})\}e^{i\gamma_\alpha s} \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \hat{f}(s)\ \int_0^s dp\, e^{i\gamma p}(\gamma - \gamma_\alpha)e^{-i\gamma_\alpha(s-p)} \end{aligned}$$

Wegen $[\gamma_\alpha, P_\alpha] = 0$ und (A.58′) gilt also:

$$\begin{aligned} (f(\gamma) - f(\gamma_\alpha))P_\alpha &= i\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \hat{f}(s)\ \int_0^s dp\, e^{i\gamma p}\, O(|x|^{-1})e^{-i\gamma_\alpha(s-p)} \\ &+ i\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \hat{f}(s)\ \int_0^s dp\, e^{i\gamma p}\, Q_\alpha\gamma_\alpha e^{-i\gamma_\alpha(s-p)} \end{aligned}$$

Der 1.Summand ist entsprechend der Vorgehensweise in Lemma A.2a gleich $O(|x|^{-1})$.

Es bleibt der 2.Summand:

$$\begin{aligned} i\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \hat{f}(s)\ \int_0^s dp\, e^{i\gamma p}\, Q_\alpha\gamma_\alpha e^{i\gamma_\alpha(s-p)} &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \hat{f}(s)\ \int_0^s dp\, e^{i\gamma p}\, Q_\alpha\frac{d}{ds}(e^{i\gamma_\alpha s}) \cdot e^{-i\gamma_\alpha p} &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} ds\ (\int_0^s dp\, e^{i\gamma p}\, Q_\alpha e^{-i\gamma_\alpha p})\ \hat{f}(s)\frac{d}{ds}(e^{i\gamma_\alpha s}) &= \\ [\,(\int_0^s dp\, e^{i\gamma p}\, Q_\alpha e^{-i\gamma_\alpha p})\ \hat{f}(s)e^{i\gamma_\alpha s}]_{-\infty}^{+\infty} & \\ - \int_{-\infty}^{\infty} ds\ e^{i\gamma s}\, Q_\alpha e^{-i\gamma_\alpha s}\hat{f}(s)e^{i\gamma_\alpha s} & \\ - \int_{-\infty}^{\infty} ds\ (\int_0^s dp\, e^{i\gamma p}\, Q_\alpha e^{-i\gamma_\alpha p})\ \hat{f}\,'(s)e^{i\gamma_\alpha s} & \end{aligned}$$

Der 1.Summand verschwindet in der Norm, da das Integral von 0 bis s durch $\|Q_\alpha\| \cdot s$ beschränkt ist, und nach Voraussetzung $\hat{f}(s)$ exponentiell abfällt.
Der 2.Summand ist gleich:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{i\gamma s}\hat{f}(s)Q_\alpha \overset{(A.2)}{=} f(\gamma)Q_\alpha \overset{(A.59)}{=} O(|x|^{-1}).$$

Der 3.Summand ist gleich

$$-\int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{f}\,'(s) \int_0^s dp\, e^{i\gamma p}\, Q_\alpha e^{-i\gamma_\alpha(s-p)} \;=\; O(|x|^{-1})$$

(vgl. Bew. Lemma A.2a), da für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $\hat{f}\,'(s)$ exponentiell abfällt.

Damit ist (A.54′) bewiesen.

(ii) Die Abschneidefunktion χ_R sei glatt und genüge
$\chi_R = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \langle x^\alpha\rangle \leq R \\ 0 & \text{, falls } \langle x^\alpha\rangle \geq 2R \end{cases}$. Weiter sei $\overline{\chi}_R = 1 - \chi_R$.
Da $P_\alpha = (\psi^\alpha, .)\,\psi^\alpha$ ist, ist für $R \in \mathbb{R}^+$ und $\psi_R^\alpha := \chi_R\psi^\alpha$

$$P_{\alpha,R} \;:=\; \chi_R P_\alpha \chi_R \;=\; (\chi_R\psi^\alpha, .)\,\chi_R\psi^\alpha \;=\; (\psi_R^\alpha, .)\,\psi_R^\alpha$$

Als nächstes soll gezeigt werden:

$$\lim_{R\longrightarrow\infty} \|P_{\alpha,R} - P_\alpha\| \;=\; 0 \qquad \textbf{(A.61)}$$

$$\begin{aligned} \|P_{\alpha,R} - P_\alpha\| &\leq \|\chi_R P_\alpha - P_\alpha\| + \|\chi_R P_\alpha \overline{\chi}_R\| \\ &\leq \|\overline{\chi}_R P_\alpha\| + \|P_\alpha \overline{\chi}_R\| \\ &= 2\|P_\alpha \overline{\chi}_R\| \end{aligned}$$

und weiter (für $\phi \in \mathcal{H}$ mit $\|\phi\| = 1$):

$$\begin{aligned} \|P_\alpha \overline{\chi}_R\| &= \sup_\phi \|P_\alpha \overline{\chi}_R \phi\| \\ &= \sup_\phi \|(\psi^\alpha, \overline{\chi}_R\phi)\psi^\alpha\| \\ &= \sup_\phi |(\overline{\chi}_R\psi^\alpha, \phi)|\; \|\psi^\alpha\| \\ &\leq C\, \|(\overline{\chi}_R\psi^\alpha\| \overset{R\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$f(\gamma)P_\alpha - P_\alpha f(\gamma_\alpha) \quad = \quad f(\gamma)P_{\alpha,R} - P_{\alpha,R}f(\gamma_\alpha) + A_R$$

mit

$$A_R \quad := \quad f(\gamma)(P_\alpha - P_{\alpha,R}) - (P_\alpha - P_{\alpha,R})f(\gamma_\alpha). \qquad \textbf{(A.62)}$$

Da f beschränkt ist, folgt mit (A.61)

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \|A_R\| \quad = \quad 0 \qquad \textbf{(A.63)}$$

Nun hat ψ_R^α kompakten Träger und erfüllt damit sicher die Voraussetzung ψ_R^α, $\nabla\psi_R^\alpha \in \langle x^\alpha \rangle^{-2} L^2(X^\alpha)$ von Teil (i'). Daher folgt

$$f(\gamma)P_{\alpha,R} - P_{\alpha,R}f(\gamma_\alpha) \quad = \quad O(|x|^{-1}), \qquad \textbf{(A.64)}$$

wobei $O(|x|^{-1})$ von R abhängt.

Insgesamt ergibt sich damit die behauptete Formel (A.55) aus (A.62) – (A.64).

(iii)

$$f(\gamma)P_\alpha - P_\alpha f(\gamma) \quad = \quad [f(\gamma) - f(\gamma_\alpha)]P_\alpha +$$

$$[f(\gamma_\alpha)P_\alpha - P_\alpha f(\gamma_\alpha)] \quad + \quad P_\alpha[f(\gamma_\alpha) - f(\gamma)] \qquad \textbf{(A.65)}$$

Da aus $[\gamma_\alpha, P_\alpha] = 0 \quad [f(\gamma_\alpha), P_\alpha] = 0$ folgt, gilt *unter den Voraussetzungen von* **(i')**

$$f(\gamma)P_\alpha - P_\alpha f(\gamma) \quad = \quad O(|x|^{-1}), \qquad \textbf{(A.54a)}$$

Der 1.Summand ist nämlich entsprechend (A.54') gleich $O(|x|^{-1})$; und der 3.Summand ist ebenfalls $O(|x|^{-1})$, denn analog zum Vorgehen in Teil (i') schließt man zunächst mit (A.57a) $\quad P_\alpha(\gamma - \gamma_\alpha) = O(|x|^{-1}) + Q_\alpha\gamma_\alpha$ und daraus wörtlich wie in (i') Behauptung (A.54a).

Unter den Voraussetzungen von **(ii)** schließt man:

$$f(\gamma)P_\alpha - P_\alpha f(\gamma) \quad \stackrel{\epsilon}{=} \quad O(|x|^{-1}) \qquad \textbf{(A.55a)}$$

auf ganz ähnliche Weise, wobei für den 3.Summanden aus (A.65)

$$A'_R \quad := \quad f(\gamma_\alpha)(P_\alpha - P_{\alpha,R}) - (P_\alpha - P_{\alpha,R})f(\gamma)$$

benutzt wird.

□

Der Nicht-Schwellenfall (Kapitel 7)

Die Eigenschaft (E) im Nicht-Schwellenfall formulieren und beweisen Sigal und Soffer als

Theorem 7.1a *Sei* $E \notin (\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H))$. *Dann gilt für jede beschränkte glatte Funktion* $F(s)$ *mit* kompaktem *Träger und* $\operatorname{dist}(supp\, F, \Sigma_E) > 0$*: es existiert ein kleines Intervall* $\Delta \ni E$*, so daß*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|F(\gamma)\frac{1}{\sqrt{<x>}}\psi_t\|^2 dt \leq C\|\psi\|^2 \tag{7.1}$$

für alle $\psi \in Ran P_\Delta$ *mit* $\psi_t = e^{iHt}\psi$ *und einem* $C \in \mathbb{R}$ *unabhängig von* ψ.

Bem. Sigal und Soffer formulieren Theorem 7.1 ohne die Einschränkung, daß $F(s)$ *kompakten* Träger hat. Ein Beweis dieser stärkeren Aussage, die eine Gleichmäßigkeit im Parameter R in Prop. 7.5a erforderte, ist jedoch aus ihrer Arbeit nicht ersichtlich (vgl. auch die Bem. nach Prop. 7.5a). Wir beschränken uns deshalb auf den Nicht-Schwellenfall in der Version von Theorem 7.1a .

Def. Sei $F(s \geq s_0)$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}$ mit

$$F(s \geq s_0) = \begin{cases} 1 & \text{,für } s \geq s_0 + \delta_1,\ \delta_1 > 0 \text{ fest} \\ 0 & \text{,für } s \leq s_0 - \delta_1 \\ \geq 0 & \text{und } \leq 1 \text{ sonst} \end{cases} .$$

Den Hauptteil des Beweises von Theorem 7.1a liefert

Proposition 7.2 *Sei* $E \notin (\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H))$, $\gamma_0 \notin \Sigma_E \cup \{0\}$ *und* $|\gamma_0| < \max_{(\alpha \text{ offen})} \kappa_\alpha$. *Dann existiert ein kleines Intervall* $\Delta \ni E$*, so daß*

$$F_\Delta i[H, F(\gamma \geq \gamma_0)]F_\Delta \ \stackrel{\bullet}{\geq}\ \theta F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F'(\gamma \geq \gamma_0) \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \tag{7.2}$$

gilt für ein gewisses $\theta > 0$ *und für jedes* $F(s \geq \gamma_0)$ *mit* $F'(s \geq \gamma_0) \geq 0$ *und supp* $F'(s \geq \gamma_0) \subset [\gamma_0 - \delta_1, \gamma_0 + \delta_1]$*, wobei*

$$\delta_1 \ < \ \min\{|\gamma_0|,\ (8|\gamma_0|)^{-1},\ \tfrac{1}{10}\,\tfrac{1}{10+|\gamma_0|}D,\ \tfrac{1}{12|\gamma_0|}\,\tfrac{1}{2+\gamma_0^2}D\} .$$

mit $D := dist\,(\gamma_0, \Sigma_E)$.

Beweis (Prop.7.2) Wähle $\Delta' \supset \Delta$ fest, so daß $F_{\Delta'}F_\Delta = F_\Delta$. Δ sei dabei so klein vorgegeben, daß auch $U_{\frac{1}{10}|\Delta'|}(\Delta') \cap \sigma^{pp}(H) = \emptyset$ gilt; dann folgt für alle $N \in \mathbb{N}$: $F^N_{\Delta'} = F_{\Delta'}$. $F(s \geq \gamma_0)$ erfüllt die Voraussetzung von Korollar A.9 . Durch Umbenennung ergibt sich direkt aus (A.49):

$$\begin{aligned} F_\Delta i[H, F(\gamma \geq \gamma_0)]F_\Delta \quad &= \\ F_\Delta F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)F_{\Delta'} i[H,\gamma]F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)F_\Delta \quad &+ \quad O(|x|^{-2}). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Mit $A = \frac{1}{2}(p \cdot x + x \cdot p)$ gilt

$$i[H,\gamma] \quad = \quad \langle x\rangle^{-\frac{1}{2}}(i[H,A] - 2\gamma^2)\langle x\rangle^{-\frac{1}{2}} + O_1(|x|^{-2}). \tag{7.4}$$

Wir zeigen: $\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} i[H,\gamma]\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} = i[H,A] - 2\gamma^2 + O_1(|x|^{-1})$

$$\begin{aligned} \langle x\rangle^{\frac{1}{2}} i[H,\gamma]\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} \quad &= \\ \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\ \tfrac{1}{2} i[H, p\cdot\hat{x}]\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} \quad &+ \quad \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\ \tfrac{1}{2} i[H, \hat{x}\cdot p]\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} = \\ \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\ \tfrac{1}{2} i[H, p\cdot x]\langle x\rangle^{-\frac{1}{2}} \quad &+ \quad \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\ \tfrac{1}{2}(p\cdot x) i[H, \langle x\rangle^{-1}]\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} \ + \\ \langle x\rangle^{-\frac{1}{2}}\ \tfrac{1}{2} i[H, x\cdot p]\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} \quad &+ \quad \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\ \tfrac{1}{2} i[H, \langle x\rangle^{-1}](x\cdot p)\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} \ = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i[H,A] \qquad & -\tfrac{1}{2}\, i[\,[H, p\cdot x], \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}]\langle x\rangle^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\, \langle x\rangle^{-\frac{1}{2}}[\,[H, x\cdot p], \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}] + \\ & \tfrac{1}{2}\{\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}(p\cdot\hat{x}) i\langle x\rangle[H,\langle x\rangle^{-1}]\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\ i[H,\langle x\rangle^{-1}]\langle x\rangle(\hat{x}\cdot p)\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} i[H, p\cdot x] \quad &= \quad i[p^2 + V, p]\cdot x + p \cdot\ i[p^2 + V, x] \ = \\ i[V,p]\cdot x \quad + \quad p\cdot\ i[p^2, x] \quad &= \quad -(\nabla V)\cdot x + 2p^2 \end{aligned}$$

ergibt sich $i[\,[H, p\cdot x], \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}] = 2[p^2, \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}] = O_1(|x|^{-\frac{1}{2}})$, d.h. der 2.Summand (und analog der 3.) sind gleich $O_1(|x|^{-1})$.
Mit $\langle x\rangle[H,\langle x\rangle^{-1}] = -[H,\langle x\rangle] = -[p^2,\langle x\rangle]$ und $i[p^2,\langle x\rangle] = p\cdot\ i[p,\langle x\rangle] + i[p,\langle x\rangle]\cdot p = (\nabla\langle x\rangle)\cdot p + p\cdot(\nabla\langle x\rangle) = \hat{x}\cdot p + p\cdot\hat{x}$ berechnet man für den 4.Summanden:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\{\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}(p\cdot\hat{x}) i\langle x\rangle[p^2,\langle x\rangle]\langle x\rangle^{-\frac{1}{2}} \quad &+ \quad \langle x\rangle^{-\frac{1}{2}}\ i[p^2,\langle x\rangle](\hat{x}\cdot p)\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\} = \\ -\tfrac{1}{2}\{\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}(p\cdot\hat{x})(\hat{x}\cdot p)\langle x\rangle^{-\frac{1}{2}} \quad &+ \quad \langle x\rangle^{-\frac{1}{2}}(p\cdot\hat{x})(\hat{x}\cdot p)\langle x\rangle^{\frac{1}{2}} \ + \\ \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}(p\cdot\hat{x})^2\langle x\rangle^{-\frac{1}{2}} \quad &+ \quad \langle x\rangle^{-\frac{1}{2}}(\hat{x}\cdot p)^2\} \ = \\ -\tfrac{1}{2}\{(\hat{x}\cdot p)^2 + 2(\hat{x}\cdot p)(p\cdot\hat{x}) + (p\cdot\hat{x})^2\} \quad &+ \quad O(|x|^{-2}) \ = \\ -2\gamma^2 + O(|x|^{-2}). & \end{aligned}$$

Damit ist Formel (7.4) bewiesen.

(7.3), (7.4) und (3.17) implizieren

$$F_\Delta i[H, F(\gamma \geq \gamma_0)]F_\Delta \quad \doteq$$

$$F_\Delta F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)F_{\Delta'}\frac{1}{\sqrt{<x>}}(i[H,A] - 2\gamma^2)\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)F_\Delta\,, \quad \textbf{(7.5)}$$

wobei sich $\doteq$ mit (3.17) aus

$$F_\Delta F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)F_{\Delta'}\,O_1(|x|^{-2})F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)F_\Delta \quad = \quad O(|x|^{-2})$$

ergibt. Wir benutzen Formel (3.17) im Folgenden so oft, daß wir es nicht immer eigens erwähnen.
$F_{\Delta'}$ und $F'(\gamma \geq \gamma_0)$ erfüllen (A.1′) und es gilt:

$$|\nabla <x>^{-\frac{1}{2}}| \;= |(\partial_{x_i}(1+|x|^2)^{-\frac{1}{4}})_i| = (\tfrac{1}{4}\,\frac{<x>^2-1}{<x>^5})^{\frac{1}{2}} \;\leq <x>^{-\frac{3}{2}}.$$

Damit folgen mit Lemma A.4(ii) die Beziehungen

$$[F_{\Delta'}, <x>^{-\frac{1}{2}}] \;=\; O(|x|^{-\frac{3}{2}}) \qquad \textbf{(7.6)}$$

und

$$[F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0), <x>^{-\frac{1}{2}}] \;=\; O(|x|^{-\frac{3}{2}}). \qquad \textbf{(7.7)}$$

Als nächstes soll gezeigt werden, daß aus (7.5) folgt:

$$F_\Delta i[H, F(\gamma \geq \gamma_0)]F_\Delta \quad \doteq$$

$$F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}}F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)F_{\Delta'}(i[H,A] - 2\gamma^2)F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_\Delta \quad \textbf{(7.5 a)}$$

Es ist mit (7.6) :

$$\begin{aligned} &F_\Delta F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'}\frac{1}{\sqrt{<x>}}(i[H,A] - 2\gamma^2)\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}F_\Delta \quad = \\ &F_\Delta F'^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_{\Delta'}(i[H,A] - 2\gamma^2)\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}F_\Delta \quad + \\ &F_\Delta F'^{\frac{1}{2}}O(|x|^{-\frac{3}{2}})(i[H,A] - 2\gamma^2)\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}F_\Delta \quad . \end{aligned}$$

Vom 2.Summanden ist zu zeigen, daß er $O(|x|^{-1-\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ ist; nach (3.17) muß nur überprüft werden, ob

$$\begin{aligned} O(|x|^{-\frac{3}{2}})(i[H,A]-2\gamma^2)\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta} &= O(|x|^{-\frac{3}{2}}) \Leftrightarrow \\ \|<x>^{\beta}O(|x|^{-\frac{3}{2}})(i[H,A]-2\gamma^2)\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta}<x>^{\frac{3}{2}-\beta}\| &< \infty \, \forall \beta \in [0,2]. \end{aligned}$$

Das aber folgt, wenn

$$\begin{aligned} &\|<x>^{\beta}O(|x|^{-\frac{3}{2}})<x>^{\frac{3}{2}-\beta}\| \; \|<x>^{-\frac{3}{2}+\beta}(i[H,A]-2\gamma^2)\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_{\Delta'}<x>^{2-\beta}\| \\ &\quad \times \|<x>^{-2+\beta}fgh<x>^{2-\beta}\| \; \|<x>^{-2+\beta}F_{\Delta}<x>^{2-\beta}\| < \infty \quad . \end{aligned}$$

Der 1.Faktor ist nach Definition beschränkt; die Beschränktheit der letzten beiden Faktoren folgt aus Lemma A.4(ii), z.B.:

$$\|<x>^{-2+\beta}F_{\Delta}<x>^{2-\beta} \;\leq \|F_{\Delta}\| + \|<x>^{-2+\beta}[F_{\Delta},<x>^{2-\beta}]\| \;< \infty.$$

Es bleibt der 2.Faktor:

$$\begin{aligned} &<x>^{-\frac{3}{2}+\beta}(i[H,A]-2\gamma^2)\frac{1}{\sqrt{<x>}}F_{\Delta'}<x>^{2-\beta} \overset{(7.4)}{=} \\ &<x>^{-1+\beta}(i[H,\gamma]+O_1(|x|^{-2}))F_{\Delta'}<x>^{2-\beta} \quad . \end{aligned}$$

Der $O_1(|x|^{-2})$ -Term ist $= <x>^{-1}(<x>^{\beta}O_1(|x|^{-2})F_{\Delta'}<x>^{2-\beta})$; der $[H,\gamma]$-Term ergibt wegen (A.44a) ein ganz ähnliches Resultat.

Analog kommutiert man $\frac{1}{\sqrt{<x>}}$ noch einmal auf der linken und noch zweimal auf der rechten Seite, womit (7.5 a) bewiesen ist.

Aus Lemma A.5(i) ergibt sich unmittelbar

$$[F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0), F_{\Delta'}] \;=\; O(|x|^{-1}). \tag{7.8}$$

Da $supp\, F'^{\frac{1}{2}}(s \geq \gamma_0) \subset [\gamma_0 - \delta_1, \gamma_0 + \delta_1]$ ergibt der Spektralsatz mit $\varepsilon := 4|\gamma_0|\delta_1$:

$$F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)\gamma^2 F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0) \;\leq\; F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)(\gamma_0^2+\varepsilon)F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0) \,, \tag{7.9}$$

weil $(\gamma_0+\delta_1)^2 \leq \gamma_0^2 + 2|\gamma_0|\delta_1 + \delta_1^2 \leq \gamma_0^2 + 3|\gamma_0|\delta_1$, denn es gilt $\delta_1 \leq |\gamma_0|$ nach Voraussetzung.

Allgemein gilt:

$$A \le B \text{ und } C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \Rightarrow \quad C^*AC \le C^*BC\,, \tag{7.9 a}$$

wie unmittelbar aus der Definition klar ist.
Also gilt

$$\begin{aligned} F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}\gamma^2 F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'} &\le F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}}(\gamma_0^2+\varepsilon)F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'} \overset{(7.8),(7.9)}{\Rightarrow} \\ F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'}\gamma^2 F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}} &\le F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'}(\gamma_0^2+\varepsilon)F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}} + O(|x|^{-1}), \end{aligned}$$

daher:

$$\begin{aligned} F_\Delta i[H, F(\gamma \ge \gamma_0)]F_\Delta &\stackrel{\bullet}{\ge} \\ F_\Delta \frac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}} F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'}(i[H,A] - 2\gamma_0^2 - 2\varepsilon)F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}} F_\Delta \quad , \end{aligned}$$

"$\stackrel{\bullet}{\ge}$" ensteht dabei aus

$$F_\Delta \frac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}} O(|x|^{-1}) \frac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}} F_\Delta = F_\Delta O(|x|^{-2}) F_\Delta \;=\; O(|x|^{-2})\,.$$

Wir schätzen nun $F_{\Delta'}\, i[H,A]F_{\Delta'}$ nach (6.46) ab. Der Index N kann dabei nach Wahl von Δ und Δ' (s.o.) weggelassen werden und man erhält:

$$\begin{aligned} F_\Delta i[H, F(\gamma \ge \gamma_0)]F_\Delta &\stackrel{\bullet}{\ge} \\ F_\Delta \frac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}} F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'}(\textstyle\sum(2\kappa_\alpha^2 - \varepsilon)\phi_\alpha - 2\gamma_0^2 - 2\varepsilon)F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}} F_\Delta \quad . \end{aligned}$$

Die ϕ_α sind dabei wie in (7.11) definiert (für Einzelheiten vgl. die Formulierung von Thm. 6.1′). Als nächstes sollen μ, $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ so gefunden werden, daß gilt:

$$\begin{aligned} F_{\Delta'}(\textstyle\sum(2\kappa_\alpha^2 - \varepsilon)\phi_\alpha - 2\gamma_0^2 - 2\varepsilon)F_{\Delta'} &\overset{(!)}{\ge} \\ F_{\Delta'}(\textstyle\sum(2\kappa_\alpha^2 - 2\mu\gamma_0^2 - 2\lambda\varepsilon)\phi_\alpha)F_{\Delta'} &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\Delta'}(\textstyle\sum(\frac{\varepsilon}{2}\phi_\alpha) + \gamma_0^2 + \varepsilon)F_{\Delta'} &\le F_{\Delta'}(\textstyle\sum(\mu\gamma_0^2 + \lambda\varepsilon)\phi_\alpha)F_{\Delta'} \Leftrightarrow \\ (\gamma_0^2 + \varepsilon)F_{\Delta'}{}^2 &\le (\mu\gamma_0^2 + (\lambda - \tfrac{1}{2})\varepsilon)F_{\Delta'}(\textstyle\sum \phi_\alpha)F_{\Delta'}\,. \end{aligned}$$

Wegen (6.47): ${F_{\Delta'}}^2 < (1+\varepsilon)F_{\Delta'}(\sum\phi_\alpha)F_{\Delta'}$ ist das der Fall, wenn:

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)(\gamma_0^2+\varepsilon) \leq (\gamma_0^2+\varepsilon)+((\mu-1)\gamma_0^2+(\lambda-\tfrac{3}{2})\varepsilon) &\Leftrightarrow \\ \varepsilon\gamma_0^2+\varepsilon^2 \leq (\mu-1)\gamma_0^2+(\lambda-\tfrac{3}{2})\varepsilon) &\Leftrightarrow \\ 0 \leq (\mu-1-\varepsilon)\gamma_0^2+(\lambda-\tfrac{3}{2}-\varepsilon)\varepsilon & \quad .\end{aligned}$$

Wähle $\mu := 1+\varepsilon$, dann folgt $\lambda - \frac{3}{2} - \varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{3}{2}+\varepsilon$. (Die Wahl $\mu = 1$ hat $\lambda \geq \gamma_0^2 - \frac{3}{2} - \varepsilon$ zur Folge - unpraktisch!)

Insgesamt ergibt sich damit

$$F_\Delta i[H, F(\gamma \geq \gamma_0)]F_\Delta \quad \overset{\bullet}{\geq}$$

$$2F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F'^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'} \sum_{\text{offene } \alpha} (\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon)\phi_\alpha F_{\Delta'} F'^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \quad \textbf{(7.10)}$$

mit

$$\phi_\alpha = \sum_{\alpha(S)=\alpha} j_S F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) F_\alpha(|p_\alpha| = \kappa_\alpha) F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) j_S^* \quad \textbf{(7.11)}$$

(Einzelheiten über die verwendeten Operatoren findet man in der Formulierung von Theorem 6.1'.) Aus der Definition von $F(s < \kappa_\alpha + \delta)$ (vgl. Thm.6.1) folgt unmittelbar

$$F(s < \kappa_\alpha + \delta) \;=\; 0 \quad \text{für } s > \kappa_\alpha + \tfrac{3}{2}\delta \,. \quad \textbf{(7.12)}$$

Wir wählen $\delta := 10\delta_1$.

Um den Beweis von Proposition 7.2 abschließen zu können, benötigen wir
Lemma 7.3 *Sei f glatt und*

$$supp\, f \;\subset\; \{s|\,|s-\gamma_0| < \tfrac{1}{4}\delta\} \quad \textbf{(7.13)}$$

mit dem δ aus (7.11) bzw. (7.12). Dann findet man zu jedem $\varepsilon_1 > 0$ ein (von ε_1 abhängendes) $O(|x|^{-1})$, so daß:

$$f(\gamma)\phi_\alpha \overset{\varepsilon_1}{=} O(|x|^{-1}) \quad \textit{für alle } \alpha \textit{ mit } |\gamma_0| > \kappa_\alpha + 2\delta \quad \textbf{(7.14)}$$

Bew. Zunächst beweisen wir:
Für das oben gegebene f und beliebiges $\varepsilon_1 > 0$ gilt

$$f(\gamma)j_S \overset{\varepsilon_1}{=} j_S f(\gamma_\alpha) + O(|x|^{-1}) \tag{7.15}$$

wobei $\alpha(S) = \alpha$ ist und $O(|x|^{-1})$ von ε_1 abhängt.

Um (7.15) zu zeigen, betrachten wir die Kommutatoren von $f(\gamma)$ mit den Operatoren $\phi_b^a(x^a)$ und P_a^N, die die j_S aufbauen, näher. Wie wir bei der Formulierung von Thm. 6.1′ gesehen haben, ist $\phi_b^a(x^a)$ homogen vom Grade 0 und $supp\,\phi_b^a \subset X^a$. Daher gilt $|\nabla\phi_b^a(x^a)| = O(|x|^{-1})$.

Da f glatt ist und (7.13) erfüllt, sind die Voraussetzungen von Lemma A.4(i) erfüllt, und wir erhalten

$$[f(\gamma), \phi_b^a(x^a)] = O(|x|^{-1})\,. \tag{7.16}$$

Weiter gilt

$$P_a^N O(|x|^{-1}) \overset{\varepsilon_2}{=} O(|x|^{-1})\,, \tag{7.17}$$

denn: $P_a^N = \sum_{j\leq N} P_j^a$, $P_j^a = \sum_{\text{endl.}} P_{\alpha(\varepsilon_{a,j})}$ und $P_\alpha O(|x|^{-1}) \overset{\varepsilon_2}{=} O(|x|^{-1})$. Letzteres gilt, da (vgl. Lemma A.10(ii)) für alle $\beta \in [0,2]$:

$$\begin{aligned}&\|\langle x\rangle^\beta P_{\alpha,R} O(|x|^{-1})\langle x\rangle^{1-\beta}\| \leq C\cdot\|\langle x\rangle^\beta P_{\alpha,R}\langle x\rangle^{-\beta}\| = \\ &\sup_{\|\phi\|=1} \|(\psi_R^\alpha, \langle x\rangle^{-\beta}\phi)\langle x\rangle^\beta\psi_R^\alpha\| < \infty \;\; \forall R \in \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

und $\|(P_\alpha - P_{\alpha,R})O(|x|^{-1})\| \leq C\cdot\|P_\alpha - P_{\alpha,R}\| \leq \varepsilon_2$ für $R(\varepsilon_2)$ groß genug.

Durch Zurückführen von P_a^N auf eine endliche Summe von P_α 's ergibt (A.55a) sofort, daß für alle $\varepsilon_1 > 0$ gilt

$$[P_a^N, f(\gamma)] \overset{\varepsilon_1}{=} O(|x|^{-1})\,. \tag{7.18}$$

Sei $\tilde{j}_S$ definiert durch $j_S = \tilde{j}_S P_\alpha$. Setzt man dann in Formel (6.4), der Definition von j_S, $\overline{P}_{a_i}^{N_i} = \mathbf{1} - P_{a_i}^{N_i}$, so wird $\tilde{j}_S$ zu einer endlichen Summe von Termen, von denen jeder ein Produkt gewisser ϕ_b^a und P_b^N ist.

Sei also $\tilde{j}_S = \sum_{\text{endl.}} \tilde{j}^i_S$ und ein $\tilde{j}^i_S = u_1 \cdot \ldots \cdot u_m$ mit $u_k =$ ein gewisses ϕ^a_b oder P^N_b , dann gilt (unter Benutzung von (7.16) - (7.18)):

$$\begin{aligned} [f(\gamma), \tilde{j}^i_S] &= u_1 \cdot \ldots \cdot u_{m-1}[f(\gamma), u_m] + [f(\gamma), u_1 \cdot \ldots \cdot u_{m-1}]u_m \\ &\stackrel{\varepsilon_1'}{=} u_1 \cdot \ldots \cdot u_{m-1} O(|x|^{-1}) + [f(\gamma), u_1 \cdot \ldots \cdot u_{m-1}]u_m \\ &\stackrel{\varepsilon_1'}{=} O(|x|^{-1}) + [f(\gamma), u_1 \cdot \ldots \cdot u_{m-1}]u_m = \ldots \\ &\stackrel{\varepsilon_1'}{=} O(|x|^{-1}) \end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$[f(\gamma), \tilde{j}_S] \stackrel{\varepsilon_1}{=} O(|x|^{-1}) \,. \tag{7.19}$$

Lemma A.10(ii) besagt, daß für alle $\varepsilon_1 > 0$

$$f(\gamma)P_\alpha \stackrel{\varepsilon_1}{=} P_\alpha f(\gamma_\alpha) + O(|x|^{-1}) \tag{7.20}$$

Damit folgt (7.15) (unter Benutzung von (7.20) und (7.19)):

$$\begin{aligned} f(\gamma)j_S - j_S f(\gamma_\alpha) &= f(\gamma)\tilde{j}_S P_\alpha - \tilde{j}_S P_\alpha f(\gamma_\alpha) = \\ \tilde{j}_S(f(\gamma)P_\alpha - P_\alpha f(\gamma_\alpha)) &+ [f(\gamma), \tilde{j}_S]P_\alpha \stackrel{\varepsilon_1}{=} \\ \tilde{j}_S O(|x|^{-1}) &+ O(|x|^{-1})P_\alpha = O(|x|^{-1}) \end{aligned}$$

Mit diesem Zwischenergebnis soll nun (7.14) gezeigt werden:
(7.12) besagte: $supp\, F(|s| < \kappa_\alpha + \delta) \subset \{s|\ |s| < \kappa_\alpha + \frac{3}{2}\delta\}$; da wir nur α's betrachten mit $|\gamma_0| > \kappa_\alpha + 2\delta$ und nach (7.13) $supp\, f \subset U_{\frac{1}{4}\delta}(\gamma_0)$ gilt, also $supp\, f(s) \subset \{s|\ |s| > \kappa_\alpha + \frac{7}{4}\delta\}$, ergibt sich

$$f(\gamma_\alpha)F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) = 0 \,. \tag{7.20 a}$$

Wir erhalten abschließend mit (7.11) für alle α mit $|\gamma_0| > \kappa_\alpha + \delta$ (unter Benutzung von (7.20 a), (7.15) und (7.17)):

$$\begin{aligned} f(\gamma)\phi_\alpha &= \sum_{\alpha(S)=\alpha} j_S \underbrace{f(\gamma_\alpha)F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta)} F_\alpha F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) j^*_S \\ &+ \sum_{\alpha(S)=\alpha} [f(\gamma), j_S] F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) F_\alpha F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) j^*_S \\ &\stackrel{\varepsilon_1}{=} \sum_{\alpha(S)=\alpha} O(|x|^{-1}) F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) F_\alpha F(|\gamma_\alpha| < \kappa_\alpha + \delta) j^*_S \\ &\stackrel{\varepsilon_1}{=} O(|x|^{-1}) \end{aligned}$$

□ (Lemma 7.3)

Sei nun $\kappa(\varepsilon)$ die Anzahl der Summanden auf der rechten Seite von (7.10); $\kappa(\varepsilon)$ ist endlich (vgl. Thm.6.1'). Wähle $\varepsilon_1 < \varepsilon[10\kappa(\varepsilon)\rho\max\kappa_\alpha^2]^{-1}$ mit einem gewissen $\rho > 1$.
Es ist nun möglich, ein $F(\gamma = \gamma_0)$ mit

$$supp\, F_1(\gamma = \gamma_0) \quad \subset \quad U_{\frac{1}{4}\delta}(\gamma_0) = U_{\frac{5}{2}\delta_1}(\gamma_0)\ ,$$

gemäß (7.13) so zu wählen, daß

$$F_1(\gamma = \gamma_0)F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0) \quad = \quad F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0)\ ; \qquad \textbf{(7.20 b)}$$

denn es ist gleichzeitig erfüllbar: $supp\, F'^{\frac{1}{2}}(\gamma \geq \gamma_0) \subset U_{\delta_1}(\gamma_0)$ und $F_1 \equiv 1$ auf $supp\, F'^{\frac{1}{2}}$.

Offenbar ist

$$F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'} \sum_{\alpha \text{ offen}} (\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon)\phi_\alpha F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}} \quad = \qquad \textbf{(7.21 a)}$$

$$F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'} \sum_{\substack{\alpha \text{ offen} \\ |\gamma_0| \leq \kappa_\alpha + 2\delta}} (\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon)\phi_\alpha F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}} \quad + \qquad \textbf{(7.21 b)}$$

$$F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'} \sum_{\substack{\alpha \text{ offen} \\ |\gamma_0| > \kappa_\alpha + 2\delta}} (\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon)\phi_\alpha F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(7.21 c)}$$

Aus der Symmetrie von (7.21 c) und der Positivität der ϕ_α ergibt sich mit der Regel (7.9 a) sofort, daß (7.21 c) ein negativer Operator ist, da alle Koeffizienten der ϕ_α negativ sind. Wir wollen im nächsten Schritt (7.21 c) durch etwas größer Negatives nach unten abzuschätzen.
Aus (7.20 b) ergibt sich:

$$(7.21\ \text{c}) =$$

$$F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'} \sum_{\substack{\alpha \text{ offen} \\ |\gamma_0| > \kappa_\alpha + 2\delta}} (\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon)F_1\phi_\alpha F_{\Delta'}F'^{\frac{1}{2}} \quad + \qquad \textbf{(7.21 d)}$$

$$F'^{\frac{1}{2}}[F_1, F_{\Delta'}] \sum_{\substack{\alpha \text{ offen} \\ |\gamma_0| > \kappa_\alpha + 2\delta}} (\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon)\phi_\alpha F_{\Delta'} F'^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(7.21 e)}$$

Da F_1 (7.13) erfüllt, folgt aus Lemma 7.3 Formel (7.14), d.h. $\exists C$ mit $\|C\| < \varepsilon_1$, so daß $F_1(\gamma = \gamma_0)\phi_\alpha = O(|x|^{-1}) + C$. Da nach Lemma A.5(i) $[F_1, F_{\Delta'}] = O(|x|^{-1})$ und nach (7.17) $O(|x|^{-1})\phi_\alpha \overset{\varepsilon_2}{=} O(|x|^{-1})$ gilt, erhalten wir aus (7.21 e) denselben Ausdruck wie aus (7.21 d) bis auf ein $F_{\Delta'}$ auf der linken Seite. Das fehlende $F_{\Delta'}$ kann aber an späterer Stelle jederzeit aus dem linken, der Bequemlichkeit halber nicht mitgeführten F_Δ herausgezogen werden. Wir betrachten deshalb im Folgenden nur noch den Term (7.21 d), in dem wir uns den Term (7.21 e) mitbehandelt vorstellen können.

Der $O(|x|^{-1})$ -Term aus (7.21 d) ergibt mit (3.17) ein $O(|x|^{-1})$; es bleibt der C-Term aus (7.21 d) zu untersuchen: Sei $\|C\| < \varepsilon_1$, dann gilt (die 2.Summe hat höchstens $\kappa(\varepsilon)$ Summanden):

$$\Big| \sum_{\substack{\alpha \text{ offen} \\ |\gamma_0| > \kappa_\alpha + 2\delta}} (\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon)\Big| \, \|C\| \; <$$

$$\frac{\varepsilon}{10} \cdot \frac{1}{\kappa(\varepsilon)} \cdot \sum \frac{|\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\frac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon|}{|\rho \max \kappa_\alpha^2|} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{10}, \qquad \textbf{(7.21 f)}$$

sofern

$$\begin{aligned}
& \frac{|\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\frac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon|}{|\rho \max \kappa_\alpha^2|} < 1 \Leftrightarrow \\
\rho \max \kappa_\alpha^2 \; &> \; |\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon| = |\kappa_\alpha^2 - \gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon+\gamma_0^2)\varepsilon| \\
&= \; -(\kappa_\alpha^2 - \gamma_0^2) + (\tfrac{3}{2}+\varepsilon+\gamma_0^2)\varepsilon \Leftrightarrow \\
& \quad \rho \max \kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 - \gamma_0^2 > (\tfrac{3}{2}+\varepsilon+\gamma_0^2)\varepsilon \Leftarrow \\
& \quad (\rho - 1)\max \kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 > (2+\gamma_0^2)\varepsilon \Leftarrow \\
& \quad (\rho - 1)\max \kappa_\alpha^2 > (2+\gamma_0^2)\varepsilon
\end{aligned}$$

wobei beim vorletzten Schritt die Voraussetzungen $|\gamma_0| < \max \kappa_\alpha$ und $\varepsilon < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta_1 < \frac{1}{8|\gamma_0|}$ benutzt wurden.

Setze nun $\rho := 3 + \gamma_0^2$, dann gilt (7.21 f), sofern $\varepsilon < \max \kappa_\alpha^2$. Das aber ist richtig:

$$\varepsilon = 4|\gamma_0|\delta_1 < \tfrac{4}{10}\,|\gamma_0|\,\tfrac{1}{10+|\gamma_0|}D < \tfrac{4}{100}|\gamma_0|D$$
$$< \tfrac{4}{100}D\max\kappa_\alpha \overset{(!)}{\leq} \max\kappa_\alpha^2 \Leftrightarrow \tfrac{4}{100}D < \max\kappa_\alpha \Leftarrow D \leq \max\kappa_\alpha \;\checkmark$$

Auf Grund der Symmetrie von (7.21 d) ergibt sich nun aus (7.21 f) mit $\phi = F_\Delta F'^{\frac{1}{2}}\psi$, $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\Big(\sum_{\substack{\alpha \text{ offen}\\ |\gamma_0|>\kappa_\alpha+2\delta}} |\kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\tfrac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon|\;C\phi,\phi\Big) \;\leq\; (\tfrac{\varepsilon}{10}\phi,\phi) \;\Rightarrow$$

$$(7.21\text{ d}) \geq -\tfrac{\varepsilon}{10}F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'}{}^2F'^{\frac{1}{2}}$$

und damit:

$$(7.21\text{ a}) \;\geq\; (7.21\text{ b}) - \tfrac{\varepsilon}{10}F'^{\frac{1}{2}}F_{\Delta'}{}^2F'^{\frac{1}{2}} + O(|x|^{-1}) \qquad \mathbf{(7.21)}$$

Aus $\delta = 10\delta_1$ und $\delta_1 < \frac{1}{10}\,\frac{1}{10+|\gamma_0|}D$ folgt $2\delta < \frac{1}{5}\,dist(|\gamma_0|,\kappa_\alpha)$ für alle $\kappa_\alpha \in \Sigma_E$ und damit

$$|\gamma_0| \leq \kappa_\alpha + 2\delta \quad\Leftrightarrow\quad |\gamma_0| < \kappa_\alpha \qquad \mathbf{(7.22)}$$

Definiert man

$$\theta := \min\nolimits_{\kappa_\alpha>|\gamma_0|}\;(\kappa_\alpha^2 - \gamma_0^2) \qquad \mathbf{(7.23)}$$

dann folgt

$$\varepsilon < \tfrac{1}{10}\theta \quad, \qquad \mathbf{(7.23a)}$$

da

$$\tfrac{1}{10}\theta \overset{(7.23)}{=} \tfrac{1}{10}\min_{\kappa_\alpha>|\gamma_0|}(\kappa_\alpha^2-\gamma_0^2) = \tfrac{1}{10}\min_{\kappa_\alpha>|\gamma_0|}(\kappa_\alpha-|\gamma_0|)\,(\kappa_\alpha+|\gamma_0|)$$
$$\geq \tfrac{1}{5}|\gamma_0|D \overset{(!)}{>} 4|\gamma_0|\delta_1 \quad \text{, wenn}$$
$$\tfrac{1}{5}D \geq 4\tfrac{1}{10}\,\tfrac{1}{10+|\gamma_0|}D \;\Leftarrow \tfrac{1}{5} \geq \tfrac{4}{100}\,.$$

Wir zeigen als Nächstes (beachte (7.22)):

$$(7.21\text{ b}) \quad \geq \quad \tfrac{2}{3}\theta F'^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}\Big(\sum_{\substack{\alpha \text{ offen} \\ |\gamma_0|<\kappa_\alpha}} \phi_\alpha \Big) F_{\Delta'} F'^{\frac{1}{2}} \tag{7.24}$$

Dazu reicht es aus, wenn für $\kappa_\alpha > |\gamma_0|$:

$$\begin{array}{rcl} \kappa_\alpha^2 - (1+\varepsilon)\gamma_0^2 - (\frac{3}{2}+\varepsilon)\varepsilon & \geq & \frac{2}{3}\theta \Leftrightarrow \\ \kappa_\alpha^2 - \gamma_0^2 - (\frac{3}{2}+\varepsilon+\gamma_0^2)\varepsilon & \geq & \frac{2}{3}\theta \overset{(7.23)}{\Leftarrow} (\text{mit } \kappa_\alpha^2 - \gamma_0^2 \geq \theta) \\ \frac{1}{3}\theta \geq (\frac{3}{2}+\varepsilon+\gamma_0^2)\varepsilon & \overset{(\varepsilon<\frac{1}{2})}{\Leftarrow} & \frac{1}{3}\theta \geq (2+\gamma_0^2)\varepsilon \overset{(\theta\geq D)}{\Leftarrow} \\ \frac{1}{3}D \geq (2+\gamma_0^2)4|\gamma_0|\delta_1 & \Leftarrow & \delta_1 < \frac{1}{12|\gamma_0|}\,\frac{1}{2+\gamma_0^2}D \end{array}$$

was nach Voraussetzung erfüllt ist.

Ganz analog zu den Überlegungen, mit denen wir die Formel (7.21) mit Hilfe von Lemma 7.3 erhalten haben, schätzen wir nun die rechte Seite von (7.24) ab:

$$\tfrac{2}{3}F'^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'} \sum_{\substack{\alpha \text{ offen} \\ |\gamma_0|<\kappa_\alpha}} \phi_\alpha F_{\Delta'} F'^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}F'^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'} \sum_{\alpha \text{ offen}} \phi_\alpha F_{\Delta'} F'^{\frac{1}{2}}$$

$$-\tfrac{2}{3}F'^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'} \sum_{\substack{\alpha \text{ offen} \\ |\gamma_0|>\kappa_\alpha+2\delta}} \phi_\alpha F_{\Delta'} F'^{\frac{1}{2}} \tag{7.24a}$$

(7.24 a) wird entsprechend (7.21 c) behandelt; es entstehen wiederum zwei $O(|x|^{-1})$ -Terme, einer aus dem Kommutator-Term von $F_1(\gamma = \gamma_0)$ mit $F_{\Delta'}$, und einer aus dem Ergebnis der Anwendung von Lemma 7.3 auf $F_1\phi_\alpha$.

Ebenso bleiben zwei gleichartige C-Terme übrig, die wir auf Grund derselben Überlegung wie bei (7.21 c) zu einem einzigen zusammenfassen können.

Man rechnet dann für $\|C\| \leq \varepsilon_1$:

$$\sum_{\substack{\alpha \text{ offen} \\ |\gamma_0|>\kappa_\alpha+2\delta}} \tfrac{2}{3}\theta\varepsilon_1 < \tfrac{2}{3}\theta\tfrac{\varepsilon}{10}\rho^{-1}(\max\kappa_\alpha^2)^{-1} < \frac{\theta}{\max\kappa_\alpha^2}\frac{\varepsilon}{10} \leq \frac{\varepsilon}{10},$$

da $\theta = \min_{\kappa_\alpha>|\gamma_0|}(\kappa_\alpha^2 - \gamma_0^2) \leq \min_{\kappa_\alpha>|\gamma_0|}\kappa_\alpha^2 \leq \max\kappa_\alpha^2$. Damit ergibt sich:

$$(7.24\text{a}) \quad \geq \quad -\tfrac{\varepsilon}{10}F'^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}{}^2 F'^{\frac{1}{2}} \quad \text{, also}$$

$$\tfrac{2}{3}F'^{\frac12}F_{\Delta'}(\sum_{\substack{\alpha\text{ offen}\\ |\gamma_0|<\kappa_\alpha}}\phi_\alpha)F_{\Delta'}F'^{\frac12} \geq \tfrac{2}{3}F'^{\frac12}F_{\Delta'}(\sum_{\alpha\text{ offen}}\phi_\alpha)F_{\Delta'}F'^{\frac12}$$

$$-\tfrac{2}{3}F'^{\frac12}F_{\Delta'}{}^2F'^{\frac12}+O(|x|^{-1}) \qquad \textbf{(7.24 b)}$$

Formel (6.47) ergibt noch:

$$F_{\Delta'}\sum_{\alpha\text{ offen}}\phi_\alpha F_{\Delta'} > F_{\Delta'}{}^2(1+\varepsilon)^{-1} > F_{\Delta'}{}^2(1-\varepsilon)\,, \qquad \textbf{(7.24c)}$$

da $(1+\varepsilon)^{-1} > 1-\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > 0$.

Nun kann das Ergebnis der Kanalanalyse zusammengesetzt werden:

$$F'^{\frac12}F_{\Delta'}\sum_{\alpha\text{ offen}}(\kappa_\alpha^2-(1+\varepsilon)\gamma_0^2-(\tfrac32+\varepsilon)\varepsilon)\phi_\alpha F_{\Delta'}F'^{\frac12} \overset{(7.21)}{\geq}$$

$$F'^{\frac12}F_{\Delta'}\sum_{\substack{\alpha\text{ offen}\\ |\gamma_0|\leq\kappa_\alpha+2\delta}}(\kappa_\alpha^2-(1+\varepsilon)\gamma_0^2-(\tfrac32+\varepsilon)\varepsilon)\phi_\alpha F_{\Delta'}F'^{\frac12}$$

$$-\tfrac{\varepsilon}{10}F'^{\frac12}F_{\Delta'}{}^2F'^{\frac12}+O(|x|^{-1}) \overset{(7.24)}{\geq}$$

$$\tfrac{2}{3}\theta F'^{\frac12}F_{\Delta'}\sum_{\substack{\alpha\text{ offen}\\ |\gamma_0|<\kappa_\alpha}}\phi_\alpha F_{\Delta'}F'^{\frac12}-\tfrac{\varepsilon}{10}F'^{\frac12}F_{\Delta'}{}^2F'^{\frac12}+O(|x|^{-1}) \overset{(7.24b),(7.24c)}{\geq}$$

$$\tfrac{2}{3}\theta(1-\varepsilon)F'^{\frac12}F_{\Delta'}{}^2F'^{\frac12}-\tfrac{2\varepsilon}{10}F'^{\frac12}F_{\Delta'}{}^2F'^{\frac12}+O(|x|^{-1}) \geq$$

$$\tfrac{\theta}{2}F'^{\frac12}F_{\Delta'}{}^2F'^{\frac12}+O(|x|^{-1}) \quad ,\text{ da}$$

$$\tfrac{2}{3}\theta(1-\varepsilon)-\tfrac{2}{10}\varepsilon=\tfrac23\theta-\tfrac23\theta\varepsilon-\tfrac{2}{10}\varepsilon \overset{(\varepsilon<\frac{1}{10}\theta)}{>}$$

$$(\tfrac23-\tfrac{2}{30}-\tfrac{2}{100})\theta=\tfrac{200-20-6}{300}\theta=\tfrac{174}{300}\theta > \tfrac{\theta}{2}.$$

Damit wird aus (7.10) (unter Benutzung von (7.6) und (7.7)):

$$F_\Delta i[H,F]F_\Delta \overset{\bullet}{\geq} \theta F_\Delta\tfrac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}}F'^{\frac12}F_{\Delta'}{}^2F'^{\frac12}\tfrac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}}F_\Delta$$

$$\doteq \theta F_\Delta\tfrac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}}F'(\gamma\geq\gamma_0)\tfrac{1}{\sqrt{\langle x\rangle}}F_\Delta$$

□ (Prop. 7.2)

Proposition 7.2 machte an γ_0 die Einschränkung $\gamma_0 < \max \kappa_\alpha$. Wir müssen deshalb auch noch Funktionen von γ untersuchen, deren Träger außerhalb einer kleinen Umgebung von $[-\max \kappa_\alpha, \max \kappa_\alpha]$ liegen.

Sei für $R \in \mathbb{R}^+$: $\chi_R : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine glatte Abschneidefunktion , d.h. $\chi_R(s) = \begin{cases} 1 & ,|s| \le R \\ 0 & ,|s| \ge 2R \end{cases}$; sei ferner $F(s \ge M)$ so beschaffen, wie in der Definition vor Prop.7.2 angegeben, und sei $\phi_R(s) := \int_0^s F_R(s)ds$ mit $F_R(s) := \chi_R(s)F(s \ge M)$.

Proposition 7.5a *Sei* $E \notin (\mathcal{T}(H) \cup \sigma^{pp}(H))$ *; sei ferner* $R,\ \delta_1,\ \varepsilon_0 > 0$ *und* $M := \max_{\alpha \text{ offen}} \kappa_\alpha + \varepsilon_0 + \delta_1$. *Dann existiert ein kleines Intervall* $\Delta \ni E$, *so daß:*

$$F_\Delta i[H, \phi_R(\gamma)] F_\Delta \ \stackrel{\bullet}{\ge}\ F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R(\gamma) \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \qquad \textbf{(7.27a)}$$

Bew. Man schließt zunächst wie im Beweis von Proposition 7.2 mit $F_R^{\frac{1}{2}}$ an Stelle von $F'^{\frac{1}{2}}$ die Gültigkeit der Formeln (7.6) - (7.8) und damit:

$$\begin{aligned}
&F_\Delta i[H, \phi_R(\gamma)] F_\Delta \ \doteq \\
&F_\Delta \tfrac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}}(\gamma) F_{\Delta'}(i[H,A] - 2\gamma^2) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}}(\gamma) \tfrac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \ \stackrel{\bullet}{\ge} \\
&F_\Delta \tfrac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}(\sum_{\alpha \text{ offen}} (2\kappa_\alpha^2 - \varepsilon)\phi_\alpha - 8R^2) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \ \ge \\
&2F_\Delta \tfrac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}(\sum_{\alpha \text{ offen}} (\kappa_\alpha^2 - 2(1+\varepsilon)R^2 - \varepsilon)\phi_\alpha) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \ \ge \\
&K F_\Delta \tfrac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}(\sum_{\alpha \text{ offen}} \phi_\alpha) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta,
\end{aligned}$$

wobei sich die erste Gleichung aus (A.49) und (7.4) ergibt;
der zweite Schritt aus (6.46) und

$$F_R^{\frac{1}{2}}(\gamma)\, \gamma^2\, F_R^{\frac{1}{2}}(\gamma) \ \le\ F_R^{\frac{1}{2}}(\gamma)\, 4R^2\, F_R^{\frac{1}{2}}(\gamma)\ ; \qquad \textbf{(7.9a)}$$

der dritte Schritt aus der folgenden Bestimmungsgleichung für $\mu,\ \lambda \in \mathbb{R}_0^+$: $0 \le (\mu - 4(1+\varepsilon))R^2 + (\lambda - \frac{1}{2})\varepsilon$ und $\mu := 4(1+\varepsilon)$, $\lambda := 2$;
der letzte Schritt aus $\kappa_\alpha^2 - 2(1+\varepsilon)R^2 - \varepsilon \ge \min \kappa_\alpha^2 - 2(1+\varepsilon)R^2 - \varepsilon$ und

$K := 2(\min \kappa_\alpha^2 - 2(1+\varepsilon)R^2 - \varepsilon)$.

Sei nun $F_1(s)$ glatt mit $F_1(s) = \begin{cases} 1 & \text{auf } supp\ F_R^{\frac{1}{2}}(s) \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R} \setminus U_{\varepsilon_0/2}(supp\ F_R^{\frac{1}{2}}(s)) \end{cases}$
und sei $\delta := \frac{1}{10}\varepsilon_0$; dann gilt analog zu Lemma 7.3 wegen $F_1(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $supp\ F_1(s) \cap supp\ F(|s| < \kappa_\alpha + \delta) = \emptyset$ für alle offenen α:

$$F_1(\gamma)\phi_\alpha \overset{\varepsilon_1}{=} O(|x|^{-1}). \qquad \textbf{(7.14a)}$$

Wir berechnen mit diesem Ergebnis:

$$(1 \pm \varepsilon) F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}{}^2 F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \overset{(6.47)}{\gtrless}$$
$$F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'} \Big(\sum_{\alpha \text{ offen}} \phi_\alpha\Big) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta =$$
$$F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'} \sum_{\alpha \text{ offen}} (F_1\phi_\alpha) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta +$$
$$F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} [F_1, F_{\Delta'}] \Big(\sum_{\alpha \text{ offen}} \phi_\alpha\Big) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta$$

Für ein C mit $\|C\| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$ ist der erste Summand gleich

$$F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'} (O(|x|^{-1}) + C) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \gtreqless$$
$$\mp \frac{\varepsilon_1}{2} F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}{}^2 F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta + O(|x|^{-2})$$

Der zweite Summand ist unter Benutzung von (7.8) für $F_1(\gamma)$, (7.11) und (7.17) gleich

$$F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} (O(|x|^{-1}) + C) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \gtreqless$$
$$\mp \frac{\varepsilon_1}{2} F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta + O(|x|^{-2}) =$$
$$\mp \frac{\varepsilon_1}{2} F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}{}^2 F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta + O(|x|^{-2}),$$

wobei im letzten Schritt $F_\Delta = F_\Delta F_{\Delta'}$, (7.6) und (7.7) verwendet wurde.

Wir können daher beide Summanden zusammenfassen und erhalten

$$((1 \pm \varepsilon) \pm \varepsilon_1) F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}{}^2 F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \quad \gtrless \quad O(|x|^{-2})$$

für beliebig kleines ε und ε_1, also:

$$F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}{}^2 F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \;=\; O(|x|^{-2}). \qquad \textbf{(7.28)}$$

Da die behauptete Ungleichung (7.27a) kurzreichweitige Störterme zuläßt, können wir schließen (beachte $K < 0$):

$$\begin{aligned} F_\Delta i[H, \phi_R(\gamma)] F_\Delta \;&\overset{\bullet}{\geq}\; K F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'} \Big(\sum_{\alpha \text{ offen}} \phi_\alpha \Big) F_{\Delta'} F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \\ &\overset{(6.47)}{>}\; K(1+\varepsilon) F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R^{\frac{1}{2}} F_{\Delta'}{}^2 F_R^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta \\ &\overset{(7.28)}{=}\; O(|x|^{-2}) \end{aligned}$$

folglich:

$$F_\Delta i[H, \phi_R(\gamma)] F_\Delta \;\overset{\bullet}{\geq}\; 0$$

Zusammen mit

$$(7.28) \quad \overset{(7.6),(7.8)}{\Rightarrow} \quad F_\Delta \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_R(\gamma) \frac{1}{\sqrt{<x>}} F_\Delta = O(|x|^{-2})$$

ergibt sich dann die Behauptung.

□ (Prop.7.5a)

Bem. Betrachtet man von vornherein $F(\gamma \geq M)$, wie es Sigal und Soffer tun, dann folgt mit (A.49a),(A.44a) und (3.17) auf simple Weise

$$\begin{aligned} F_\Delta i[H, \phi_R(\gamma)] F_\Delta \;&\doteq\; F_\Delta F(\gamma \geq M) F_{\Delta'}\, i[H, \gamma] F_\Delta \\ &=\; O(|x|^{-1}), \end{aligned}$$

wobei $\phi(s) := \int_0^s F(s \geq M)\, ds$.

Das aber ist zuwenig; man braucht einen stärkeren Abfall und muß deshalb $[H, \gamma]$ nach Formel (7.4) ersetzen. Dann aber versagt sowohl die Abschätzung von γ durch eine Zahl (vgl.(7.9)), als auch das Argument aus Lemma 7.3 (wegen Lemma A.10) .

Bew. Thm. 7.1a Lemma 3.4 zeigt die Gültigkeit einer Abschätzung des Typs (7.1) für die Funktionen $F'(\gamma \geq \gamma_0)$ aus Prop. 7.2 und $F_R(\gamma)$ aus Prop. 7.5a ; dazu eine kleine Konkordanz der Bezeichnungen:

Lemma 3.4	F	F_0	P_Δ	F_1	(3.8)	(3.10)
Prop. 7.2	$F(\gamma \geq \gamma_0)$	$F'(\gamma \geq \gamma_0)$	F_Δ	$O(\lvert x\rvert^{-\varepsilon})$	(7.2)	(7.1)
Prop. 7.5a	$\phi_R(\gamma)$	$F_R(\gamma)$	F_Δ	$O(\lvert x\rvert^{-\varepsilon})$	(7.27a)	(7.1)

$F(\gamma \geq \gamma_0)$ und $\phi_R(\gamma)$ sind beschränkt (also erst recht H^n-beschränkt) und $O(|x|^{-\varepsilon})$ erfüllt (3.9) für alle $\varepsilon > 0$ nach Bemerkung 3.5 (siehe [SS]).

Es ist nun noch zu zeigen, daß (7.1) tatsächlich für *jede* in Theorem 7.1a vorgegebene Funktion $F(s)$ erfüllt ist.

Sei dazu $\varepsilon_0 > 0$ beliebig und $T := \mathbb{R} \setminus U_{\varepsilon_0}(\Sigma_E)$; da $T' := T \cap [-\max \kappa_\alpha, \max \kappa_\alpha]$ kompakt ist, läßt sich immer eine *endliche* Menge $\mathcal{M} \subset T'$ finden, so daß $\bigcup_{\gamma_0 \in \mathcal{M}} U_{\delta_1}(\gamma_0)$ eine Überdeckung von T' ist. Ebenso läßt sich erreichen, daß $\sum_{\gamma_0 \in \mathcal{M}} F'(\gamma \geq \gamma_0)$ eine glatte Funktion mit Träger T' für geeignet gewählte $F(\gamma \geq \gamma_0)$ ist. Nun wählt man $F_R(s)$ aus Prop. 7.5a noch so, daß $supp\, F_R(s) = [\max \kappa_\alpha + \varepsilon_0, 2R]$ ist. Dann gilt (7.1) für alle $F'(\gamma \geq \gamma_0)$ mit $\gamma_0 \in \mathcal{M}$ und $F_R(\gamma)$, und (per Dreiecksungleichung) auch für $F_0(s) := F_R(\gamma) + \sum_{\gamma_0 \in \mathcal{M}} F'(\gamma \geq \gamma_0)$, wobei F_0 glatt, beschränkt und mit Träger $T \cap [-2R, 2R]$ ist. Insbesondere kann F_0 so gewählt werden, daß $F_0 \geq C > 0$ ist für alle s mit $dist(s,\ \Sigma_E) \geq 2\varepsilon_0$ und $|s| \leq R$.

Ist nun $F(s)$ eine beliebige in Theorem 7.1a zugelassene Funktion mit $dist(supp\ F,\ \Sigma_E) =: 2\varepsilon_0$ und $supp\ F \subset [-R, R]$, dann existiert ein stetiges beschränktes $g(s)$ mit $F(s) = g(s) \cdot F_0(s)$; also:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \|F(\gamma)\tfrac{1}{\sqrt{<x>}}\psi_t\|^2 dt &\leq \|g(\gamma)\| \int_{-\infty}^{\infty} \|F_0(\gamma)\tfrac{1}{\sqrt{<x>}}\psi_t\|^2 dt \\ &\leq C\, \|\psi\|^2\end{aligned}$$

□ (Thm. 7.1a)

Literatur

[K] Kanwal, R.P.: Generalized Functions, XIII + 438p., (1983)

[PSS] Perry, P., Sigal, I.M., Simon, B.: Ann. Math. **114**, 519 - 567, (1981)

[RS] Reed, M., Simon, B.: Methods of Mathematical Physics III, Scattering Theory, XV + 463p., (1979)

[SS] Sigal, I.M., Soffer, A.: Ann. Math. **126**, 35 - 108, (1987)

[W] Walden, R.: Diplomarbeit (in Vorbereitung)

[We] Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen, 368 S., (1976)