Einführung in die Variationsrechnung

Vorlesung an der Justus-Liebig-Universität Gießen
WS 2009/2010

Zusammenfassung:

Die Variationsrechnung ist ein klassischer Zweig der Analysis, der aus der Untersuchung von Problemen der Physik und Geometrie entstanden ist. Ursprung war die Lösung des Problems der Brachystochrone 1697 durch Jakob Bernoulli.
Behandelt werden ausschließlich direkte Methoden der Variationsrechnung, bei denen basierend auf den Euler-Lagrange-Gleichungen für Extrema von Funktionalen die Existenz und, wenn möglich, die Regularität und Eindeutigkeit von Minimierern nachgewiesen werden soll.
Zunächst wird die klassische Variationsrechnung für stetig differenzierbare Funktionen entwickelt und grundlegende Begriffe herausgearbeitet. Zur weiteren Entwicklung der Theorie gibt die Vorlesung anschließend eine kurze Einführung in die schwache Differenzierbarkeit und stellt Grundlagen der konvexen Analysis bereit. Mit der schwachen Unterhalbstetigkeit erlaubt dies das Führen wichtiger Existenzsätze.
Eine Vielzahl wichtiger Anwendungen unterstreicht die Bedeutung der Variationsrechnung. Dargestellt und gelöst werden u.a. Probleme aus der Differentialgeometrie, Anwendungen aus der Kontroll- und Steuerungstheorie, Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen sowie Hindernisprobleme.
Gegen Ende wird auch eine Einführung in vektorwertige Variationsprobleme gegeben, wobei sich die Quasikonvexität von Funktionalen als zentraler Begriff herausstellt. Dies führt auf aktuelle Fragestellungen mit wichtigen Anwendungen etwa in den Materialwissenschaften.
Der Text richtet sich an Studierende der Mathematik ab dem 5. Semester. Vorausgesetzt werden allein die in den Grundvorlesungen Analysis und Lineare Algebra erworbenen Kenntnisse. Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie finden sich ergänzend im Anhang.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Historische Bemerkungen

Basierend auf Arbeiten von L. Euler und J. Bernoulli (beide 18. Jahrhundert) entwickelte sich die Variationsrechnung im 19. Jahrhundert aus der Analyse mechanischer Systeme. Bedeutende Beiträge lieferten u.a. K. Weierstraß, B. Riemann, J.L. Lagrange, C.G. Jacobi und W.R. Hamilton. Mit der Studie des Dirichlet-Funktionals im 20. Jahrhundert wurden von H. Lebesgue und D. Hilbert funktionalanalytische Methoden eingeführt. Bis in die jüngste Zeit gibt es Verbesserungen der Theorie mit Beiträgen u.a. von L. Ambrosio, L. Tonelli und J. Ball (Polykonvexität). Der Name Variationsrechnung bezieht sich dabei auf die Technik der Variation der Argumente. Wesentliches Ziel der Variationsrechnung ist das Finden von Extrema (häufig unter Nebenbedingungen) für ein gegebenes Funktional.

1.2 Einführende Beispiele

Wir beginnen mit charakteristischen Beispielen, die in die Thematik der Variationsrechnung einführen. Das 1. Beispiel ist historisch und im Jahr 1697 die Geburtsstunde der Variationsrechnung.

Beispiel 1: *Problem der Brachistochrone* (griech. $\beta\varrho\alpha\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$=kurz, $\chi\varrho o\nu o\varsigma$=Zeit).

Gegeben seien zwei Punkte $A = (0, 0)$ und $B = (\overline{x}, \overline{y})$ im $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten eine reibungsfreie Kugel, die auf einer vorgegebenen Bahn von A nach B rollt, angetrieben durch die als konstant angenommene Gravitation (Erdbeschleunigung) g. Zur Startzeit $t = 0$ sei noch $v(t = 0) = 0$, d.h. die Anfangsgeschwindigkeit verschwindet. Untersucht werden verschiedene Trajektorien der Form

$$\{(x, y(x)) \mid x \in [0, \overline{x}], y \leq 0\}.$$

Teile der Bahn dürfen unterhalb des Endpunkts liegen, d.h. $y(x) < \overline{y}$ ist erlaubt. [Es macht keinen Sinn, Trajektorien oberhalb von 0 zu betrachten, da die Kugel diese nicht durchlaufen kann.]

Gesucht ist die optimale Trajektorie, d.h. die Bahn, in der die Kugel in kürzester Zeit von A nach B rollt.

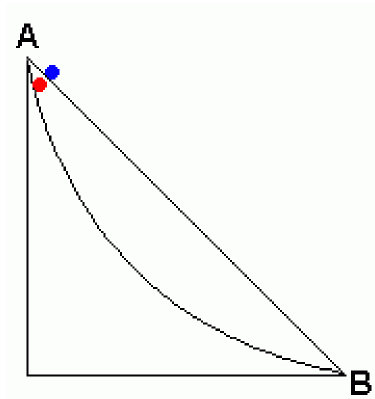

Abbildung 1.1: Profil von 2 möglichen Bahnkurven.

Mit $m > 0$ bezeichnen wir die Masse der Kugel. Für die Gesamtenergie E gilt

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}},$$

mit der potentiellen (oder Lage-)Energie

$$E_{\text{pot}} = mgy(x)$$

und der kinetischen Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Da die Kugel als reibungsfrei angenommen wurde, gilt die Energie-Erhaltung $E(t) = E(0) = 0$, d.h.

$$0 = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] + mgy(x). \tag{1.1}$$

Löst man (1.1) nach $\frac{dx}{dt}$ auf, so folgt

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{-2gy(x)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

(hier wurde rechts die positive Wurzel gewählt, da die Kugel beschleunigt, also $\frac{dx}{dt}$ positiv ist) was äquivalent ist zu

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-2gy(x)}}.$$

Die Funktion $t(x)$ gibt dabei an, wann die Kugel am Ort $(x, y(x))$ ist. Die zu minimierende Laufzeit ergibt sich daher als

$$T(y) := \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\overline{x}} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-y(x)}}\,\mathrm{d}x$$

und wir enden in dem Optimierungs-Problem

$$T(y) \to \min \tag{1.2}$$

für $y \in C^1([0, \overline{x}]; \mathbb{R})$, $y(0) = 0$, $y(\overline{x}) = \overline{y}$. $\square$

Beispiel 2: *Problem der Dido*

Dido, der Tochter des Königs von Tyros (dem heutigen Libanon), ca. 850 v. Chr, gewährte der König von Karthago so viel Land, wie sie mit einer Ochsenhaut umspannen konnte.

Gehen wir davon aus, dass das Land komplett von der Ochsenhaut berandet sein muss (also nicht etwa Teile durch die Küste des Landes gegeben werden), so kann man das Problem wie folgt formalisieren:

Gesucht ist eine Funktion $y \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ mit $y(a) = y(b) = 0$ und gegebener Kurvenlänge $L > 0$, d.h. es muss gelten

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x = L \tag{1.3}$$

und zugehörigem Flächeninhalt (es gilt $y \geq 0$ auf $[a, b]$)

$$F(y) := \int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x.$$

(*Die Bedingung (1.3) ergibt sich dabei wie folgt: Für eine Kurve* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *ist die* Bogenlänge *gegeben als*

$$\int_a^b \|h'(x)\|_2\,\mathrm{d}x.$$

Dabei ist $\|\cdot\|_2$ *die Euklidische Norm. Da der Graph einer Funktion parametrisiert wird, ist hier* $h(x) = (x, y(x))$, *also* $h'(x) = (1, y'(x))$ *und* $\|h'(x)\|_2^2 = 1^2 + y'(x)^2$.)

Das Problem der Dido lässt sich daher formulieren als

$$F(y) \to \max \tag{1.4}$$

für $y \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ mit $y(a) = y(b) = 0$. $\square$

Das Problem der Dido gilt als Urform aller *isoperimetrischen* Probleme. Ähnliche Ansätze sind von großer Bedeutung in naturwissenschaftlichen Anwendungen. In der Physik ist dies etwa das Studium der Oberflächenkräfte, i.b. von Seifenhäuten (dies führte zu den Minimalflächen). In den Materialwissenschaften treten isoperimetrische Probleme z.B. bei Grenzflächen verschiedener Phasen in Festkörpern auf. Ein einfaches Beispiel aus der Biologie: Ein kugelförmiger Körper strahlt am wenigsten Wärme ab und ist daher ideal für kalte Gegenden.

Man kann sich unmittelbar überlegen, dass die optimale Lösung konvex sein muss (andernfalls führt Reflektion der nicht-konvexen Teile an der Verbindungsgerade zu einer neuen Figur gleichen Umfangs, aber größeren Flächeninhalts).

Beispiel 3: *Seglerproblem*

Wir untersuchen den Kurs eines Seglers, der gegen den Wind kreuzen muss. Dabei nehmen wir idealisierend an, dass der Wind konstant bläst (ohne Richtungs- oder Kraft-Änderungen) und wir vernachlässigen den Effekt der Strömung auf das Boot. Kreuzen gegen den Wind ist möglich, wenn das Boot dabei einen Zickzack-Kurs beschreibt.

Das Seglerproblem ist das Finden einer möglichst optimalen, d.h. möglichst kurzen Trajektorie. Offensichtlich ist die Trajektorie umso kürzer, je öfter das Segel umgelegt wird. Daraus erkennen wir, dass es aus praktischen Gründen keine optimale Lösung für das obige Problem geben kann: Das Segel müsste dabei unendlich oft umgedreht werden. $\square$

Bei dem gerade diskutierten Beispiel ist es ziemlich offensichtlich, dass keine optimale Lösung existiert. Zum Abschluss beschreiben wir einen komplizierteren Fall ohne eine optimale Lösung.

Beispiel 4: *Kakeyas Nadelproblem*

Das Nadelproblem von Kakeya lautet: Bestimme die ebene Figur kleinsten Flächeninhalts, in der ein Segment der Länge Eins (vulgo 'Nadel') durch eine stetige Bewegung innerhalb der Fläche um 360 Grad gedreht werden kann.

Lange dachte man, die optimale Figur sei eine Hyperzykloide.

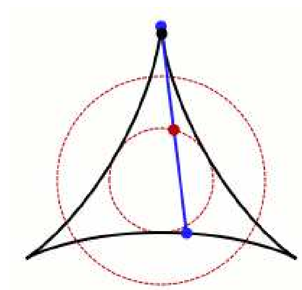

Abbildung 1.2: Hyperzykloide und Nadel(blau).

Aber (**Besicovitch, 1927**): Es gibt Figuren beliebig kleinen Flächeninhalts, in denen man ein Segment der Länge Eins um 360 Grad drehen kann.

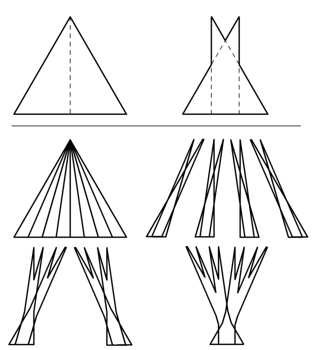

Abbildung 1.3: Konstruktion von Besicovitch.

In der geometrischen Konstruktion wird in der 1. Stufe ein gleichseitiges Dreieck der Höhe Eins in der Mitte geteilt und die beiden Teile aufeinander zugeschoben, so dass sie sich teilweise überlagern. Die so entstandene Figur hat einen kleineren Flächeninhalt als das Ausgangsdreieck. In der 2. Stufe wird das Dreieck von der Spitze aus in 8 gleiche Teile zerlegt. Jeweils 2 dieser kleinen Dreiecke werden wie in der 1. Stufe beschrieben übereinander geschoben. Von den so entstandenen 4 Teilen werden jeweils zwei wieder überlagert, die 2 so entstandenen Teile werden wieder zusammengeschoben, siehe Abbildung 1.3. Die so erhaltene Figur ist das Endprodukt der Stufe 2 und hat einen kleineren Flächeninhalt als das Ursprungsdreieck und das Endprodukt der 1. Stufe. Den Vorgang kann man beliebig wiederholen und erzeugt so in jeder Stufe eine Figur, in der ein Segment der Länge Eins in der Figur gedreht werden kann und deren Flächeninhalt kleiner ist als die Flächen der Figuren der früheren Stufen. Man kann zeigen, dass $F_n \searrow 0$ für $n \to \infty$, wobei F_n den Flächeninhalt der Figur n-ter Stufe beschreibe. Kakeyas Nadelproblem besitzt also keine Lösung. $\square$

1.3 Formalisierung

Die Optimierungsprobleme (1.2) und (1.4) sind typisch für die Variationsrechnung. Im Gegensatz zu Optimierungsproblemen im $\mathbb{R}^N$ müssen Extremwert-Probleme von *Funktionalen* ermittelt werden, d.h. von Operatoren, deren Argument(e) selbst wieder Funktionen sind.

Die obigen Beispiele 3 und 4 zeigen, dass es mit mathematischer Einsicht nicht immer leicht ist zu entscheiden, ob ein Problem wohlgestellt ist. Dies zwingt uns zu einer Formalisierung, um allgemeine Bedingungen zur Lösbarkeit von Variationsproblemen herleiten zu können.

Die Probleme vom Typ (1.2) oder (1.4) können wie folgt beschrieben werden: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene, beschränkte Menge, $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$, somit $\nabla u \in \mathbb{R}^{MN}$. Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$F(u) := \int\limits_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) \,\mathrm{d}x \to \min \tag{1.5}$$

für $u \in X$, $u = u_0$ auf $\partial\Omega$. Hier ist X ein *Banachraum* (d.h. ein vollständiger, normierter Vektor-Raum), z.B. $C^k(\Omega; \mathbb{R}^M)$, und anstelle der obigen Randbedingung an u sind eine Reihe anderer Bedingungen denkbar (wie z.B. die isoperimetrische Bedingung aus Beispiel 2).

Wir schreiben (diese Notation wird durchgängig verwendet)

$$f(x, z, p), \qquad z := u(x),\ p := \nabla u(x).$$

Wir studieren vor allem den Fall $N = 1$. Dann gilt

$$F(u) := \int\limits_a^b f(x, u(x), u'(x)) \,\mathrm{d}x \to \min \tag{1.6}$$

für ein beschränktes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^M)$ und $f \in C^1(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ eine Umgebung von

$$G := \{(x, u(x), u'(x)) \mid x \in [a, b]\}$$

ist. Dabei heißt G der *Eins-Graph* von u (im Problem (1.5) bzw. (1.6) werden nur Ableitungen bis maximal von der Ordnung 1 von u betrachtet).

1.4 Direkte Methode der Variationsrechnung

Man unterscheidet zwischen *direkten* und *indirekten* Methoden der Variationsrechnung. Die Idee der direkten Methode kann dabei an folgendem bekannten Satz illustriert werden:

Satz (Weierstraß): Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ eine abgeschlossene, beschränkte Menge (also kompakt im $\mathbb{R}^N$) und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K sein Infimum und Supremum an.

Erinnerung des Beweises: Ohne Einschränkung können wir uns auf die Infima von f beschränken (genau wie in (1.5)). Sei dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine *Minimal-Folge*, d.h. $f(x_n) \to \overline{f} := \inf_{x\in K} f(x) > -\infty$ für $n \to \infty$. Da die Menge K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge, d.h. es gibt $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_j} \to \overline{x} \in K$ für ein geeignetes $\overline{x} \in K$ und $j \to \infty$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt

$$f(\overline{x}) = \min_{x\in K} f(x). \quad \square$$

Bei der direkten Methode der Variationsrechnung wird diese Idee soweit möglich imitiert. Die Rolle von f übernimmt das Funktional F, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ wird ersetzt durch eine Minimal-Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus einem geeignet gewählten Funktionenraum.

Die Stetigkeit von F erweist sich dabei als zu starke Bedingung, man fordert vielmehr (was für Minimierungs-Probleme ausreichend ist)

$$F(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F(u_n), \tag{1.7}$$

die *Unterhalb-Stetigkeit* von F.

Für die direkte Methode der Variationsrechnung sind also wesentlich:

(i) Die Existenz einer Minimal-Folge aus einer geeignet gewählten nichtleeren abgeschlossenen Menge $B \subset X$ von Funktionen, so dass für jede Folge eine konvergente Teilfolge existiert (*Folgenkompaktheit von B*).

(ii) Die Unterhalbstetigkeit von F.

Wir werden dies in Kapitel 4 wesentlich präziser untersuchen.

Die indirekten Methoden sind alle übrigen, nicht-direkten Methoden. Diese sind i.a. komplizierter. Typische Beispiele für nicht-direkte Methoden sind etwa das Mountain-Pass-Lemma oder Index-Theorien aus der nichtlinearen Funktional-Analysis. Diese werden z.B. angewendet, wenn Sattelpunkte von F bestimmt werden müssen oder wenn topologische Probleme auftreten. Eine gute Darstellung der indirekten Methoden der Variationsrechnung findet sich etwa in [18].

Bemerkung: Die Bedingung der Unterhalb-Stetigkeit (ii) kann umso leichter erfüllt werden, je feiner die Topologie in X ist. Im Gegensatz dazu erfordert die Kompaktheits-Bedingung (i) eine grobe Topologie. In den Anwendungen erweist sich häufig die schwache Topologie in Sobolev-Räumen als geeigneter Kompromiss.

1.5 Funktionenräume

In den Abschnitten 1.2–1.3 wurden ohne Definition die Räume $C^k(\Omega;\mathbb{R}^M)$ mit $k \in \{0,1\}$ verwendet. Wir definieren diese nachfolgend, zusammen mit $L^p(\Omega)$.

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Wir bezeichnen den *Raum der stetigen Funktionen* auf $[a,b]$ als

$$C^0([a,b];\,\mathbb{R}) := \Big\{ v : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \Big\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{C^0([a,b];\,\mathbb{R})} := \sup_{x\in[a,b]} |v(x)|.$$

Analog definieren wir $C^0((a,b);\,\mathbb{R})$. Für $k = 1,2,3,\ldots$ führen wir ein

$$\|v\|_{C^k([a,b];\,\mathbb{R})} := \|v\|_{C^0([a,b];\,\mathbb{R})} + \|v'\|_{C^0([a,b];\,\mathbb{R})} + \ldots + \|v^{(k)}\|_{C^0([a,b];\,\mathbb{R})}$$

sowie den *Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen*

$$C^k([a,b];\,\mathbb{R}) := \Big\{ v \in C^0([a,b];\mathbb{R}) \;\Big|\; v^{(j)} \text{ existiert für } 1 \le j \le k,\, \|v\|_{C^k([a,b];\mathbb{R})} < \infty \Big\}$$

und den *Raum der glatten (unendlich oft) stetig differenzierbaren Funktionen*

$$C^\infty([a,b];\,\mathbb{R}) := \bigcap_{k\ge 0} C^k([a,b];\,\mathbb{R}).$$

Für $v = (v_1,\ldots,v_M) : [a,b] \to \mathbb{R}^M$ setzen wir

$$C^k([a,b];\mathbb{R}^M) := \Big\{ (v_1,\ldots,v_M) : [a,b] \to \mathbb{R}^M \;\Big|\; v_j \in C^k([a,b];\mathbb{R}) \text{ für } 1 \le j \le M \Big\}.$$

Schließlich definieren wir den *Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger*

$$C_0^\infty((a,b);\,\mathbb{R}^M) := \Big\{ v \in C^\infty((a,b);\,\mathbb{R}^M) \;\Big|\; \operatorname{supp}(v) \text{ ist kompakt} \Big\},$$

wobei

$$\operatorname{supp}(v) := \overline{\big\{ x \in (a,b) \;\big|\; f(x) \neq 0 \big\}}$$

der *Träger* (engl. support) von v ist.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $1 \le p \le \infty$ und μ ein Maß auf Ω. Wir definieren für μ-messbare Funktionen u auf Ω

$$\begin{aligned} L^p(\Omega;\mu) \;&:=\; \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\Big|\; \|u\|_{L^p} := \Big(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\}, \qquad p < \infty, \\ L^\infty(\Omega;\mu) \;&:=\; \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\Big|\; \|u\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u(x)| < \infty \Big\}, \qquad p = \infty, \end{aligned}$$

wobei

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u(x)| := \inf_{\mu(L)=0} \sup_{x\in\Omega\setminus L} |u(x)|$$

das *wesentliche Supremum* von u in Ω bezeichnet. Wir schreiben auch $L^p(\Omega)$ anstelle von $L^p(\Omega;\mu)$, wenn μ das Lebesgue-Maß ist. Der Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $L^1(\Omega;\mu)$ wird im Anhang A genauer charakterisiert.

Schließlich sei

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega') \;\Big|\; \Omega' \subset\subset \Omega \Big\}$$

der *Raum der in Ω lokal p-fach integrierbaren Funktionen.* Die Notation $\Omega' \subset\subset \Omega$ bedeutet dabei, dass $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, (die Menge Ω' ist *relativ kompakt* in Ω).

Kapitel 2

Klassische Variationsrechnung

2.1 Erste (äußere) Variation des Funktionals F

Sei u ein (lokaler) Minimierer von F. Wie bereits in Abschnitt 1.3 erklärt, gilt $u \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)$, $f \in C^1(U)$ mit $U = U(G)$, und G ist der 1-Graph von f. Der Ausdruck

$$F(v) = \int\limits_a^b f(\cdot, v, v')\,\mathrm{d}x$$

ist dann wohldefiniert für alle $v \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)$, für die $(x, v(x), v'(x)) \in U(G)$, d.h. falls

$$\|u - v\|_{C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)} < \delta$$

für ein hinreichend kleines $\delta > 0$.

Da u lokaler Minimierer von F ist, gilt

$$F(u) \le F(v) \qquad \text{für alle } v \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M),\ \|u - v\|_{C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)} < \delta.$$

Es folgt $F(u) \le F(u + \varepsilon\varphi)$ für festes $\varphi \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)$ und $|\varepsilon|$ hinreichend klein.

Wir setzen $H(\varepsilon) := F(u + \varepsilon\varphi)$, also $H : (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ und

$$H(0) \le H(\varepsilon) \qquad \text{für alle } \varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0).$$

Wegen $u, \varphi \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)$ ist $H \in C^1((-\varepsilon_0, +\varepsilon_0);\,\mathbb{R})$. Daher gilt für alle $\varphi \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)$

$$\begin{aligned}
0 &= H'(0) = \delta F(u, \varphi) = \langle \varphi, DF(u) \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} F(u + \varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int\limits_a^b f(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x), u'(x) + \varepsilon\varphi'(x))\,\mathrm{d}x\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Dabei sei $a \cdot b := \sum_{j=1}^M a_j b_j$ das *Euklidische Skalarprodukt* im $\mathbb{R}^M$ und

$$\langle x, x' \rangle := x'(x)$$

für $x \in X$ und $x' \in X'$ das *Dualitätsprodukt* von x und x', wobei X ein Banachraum und X' der *Dualraum* von X ist, d.h. der Vektorraum der linearen und stetigen Funktionale von X nach $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

Definition: Der Ausdruck $\delta F(u, \varphi)$ (bzw. das Integral in (2.1)) heißt *(äußere) 1. Variation* von F an der Stelle u in Richtung von φ.

Bemerkung: Die Abbildung

$$\varphi \mapsto \delta F(u, \varphi)$$

ist linear und stetig, denn (die Linearität kann man direkt nachrechnen)

$$|\delta F(u, \varphi)| \leq c(f, u) \|\varphi\|_{C^1([a,b];\, \mathbb{R}^M)}.$$

Definition: $u \in C^1((a, b); \mathbb{R}^M)$ mit (2.1) für alle $\varphi \in C_0^\infty((a, b); \mathbb{R}^M)$ heißt *schwache* C^1*-Extremale* von F. Anstelle von $\varphi \in C_0^\infty((a, b); \mathbb{R}^M)$ genügt es hier, $\varphi \in C_0^1((a, b); \mathbb{R}^M)$ zu fordern (macht keinen Unterschied). F heißt dann auch *stationär* in u. Die Funktion φ nennt man *Testfunktion* der Variationsgleichung (2.1).

Wir haben gezeigt:

Theorem 2.1 *Sei* $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$. *Für* $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^M)$ *mit*

$$F(u) \leq F(u + \varepsilon\varphi) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty((a, b); \mathbb{R}^M),\ u + \varphi \in U(G)$$

gilt

$$\delta F(u, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty((a, b); \mathbb{R}^M).$$

Warnung: Die schwache C^1-Extremale u muss kein Minimierer sein (stattdessen kann u auch Sattelpunkt sein).

Wir hatten $\delta F(u, \varphi) = \langle \varphi, DF(u) \rangle = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty([a, b]; \mathbb{R}^M)$. Daher kann man die rechte Seite in (2.1) als Richtungsableitung des Funktionals F in Richtung von φ interpretieren. Man erkundet also die Umgebung von u durch Variation des Arguments. (Dies gab der Variationsrechnung ihren Namen.)

Man möchte (2.1) als Beziehung für f unabhängig von φ schreiben. Dazu sei $f \in C^2((a, b) \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$ und $u \in C^2((a, b); \mathbb{R}^M)$. Mit partieller Integration folgt

$$\int_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x)) \Big] \cdot \varphi(x)\, \mathrm{d}x = 0 \tag{2.2}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty((a, b); \mathbb{R}^M)$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, u, u') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial f}{\partial p}(\cdot, u, u') = 0 \qquad \text{in } (a, b).$$

Dies ist eine Folge des

Theorem 2.2 (Fundamental–Lemma der Variationsrechnung) *Sei* $u \in C^0((a,b);\mathbb{R})$ *und*

$$\int_a^b u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}). \tag{2.3}$$

Dann gilt $u \equiv 0$ *in* (a,b).

Beweis: Sei $x_0 \in (a,b)$ mit $u(x_0) \not\equiv 0$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $u(x_0) > 0$ (sonst ersetze u durch $-u$).

Idee des Beweises: Wegen u stetig existiert für kleines $\delta > 0$ eine Umgebung $U_\delta(x_0)$ mit

$$u(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0).$$

Wir wählen dann $\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R})$ mit $\varphi = 0$ in $(a,b) \setminus \overline{U_\delta(x_0)}$ und $\varphi > 0$ in $U_\delta(x_0)$. Dann gilt

$$\int_a^b u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{U_\delta(x_0)} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

im Widerspruch zu (2.3).

Im folgenden formalisieren wir diese Idee: Setze

$$\psi(x) := \begin{cases} (x-x_0-\delta)^2(x-x_0+\delta)^2 & \text{für } x \in U_\delta(x_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Wir prüfen $\psi \in L^1((a,b);\mathbb{R})$ und verwenden, dass $C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dicht liegt für alle $1 \le p < \infty$. Damit existiert eine Folge $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R})$ mit $\varphi_\varepsilon \to \psi$ in $L^1((a,b);\mathbb{R})$ für $\varepsilon \searrow 0$ und $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset \overline{U_\delta}$ wegen (2.4). Es folgt

$$\int_a^b u(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\big(\psi(x)-\varphi_\varepsilon(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das letzte Integral verschwindet nach (2.3). Es ist

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b u(x)(\psi(x)-\varphi_\varepsilon(x))\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_a^b |u(x)||\psi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \|u\|_{C^0(\overline{U_\delta})}\|\psi-\varphi_\varepsilon\|_{L^1(a,b)} \to 0 \qquad \text{für } \varepsilon \searrow 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\left|\int_a^b u(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b u(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

aber nach (2.4)

$$\int_a^b u(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} u(x)(x-x_0-\delta)^2(x-x_0+\delta)^2\,\mathrm{d}x > 0,$$

ein Widerspruch. $\square$

Theorem 2.3 (Fundamental–Lemma, 2. Fassung) *Sei* $u \in L^1_{\text{loc}}((a,b);\mathbb{R})$ *mit*

$$\int_a^b u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Dann gilt $u(x) = 0$ *fast überall in* (a,b).

Beweis: Sei $E \subset\subset (a,b)$ messbar, $u \in L^1(E)$. Wir können eine Folge $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C_0^\infty(E)$ wählen mit $u_\varepsilon \to u$ in $L^1(E)$. Damit gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \overline{E}$,

$$\int_E u_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \int_E u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \varepsilon \searrow 0. \tag{2.5}$$

Falls die Bedingung $u(x) = 0$ fast überall in (a,b) verletzt ist, so existiert ohne Einschränkung eine Nicht-Nullmenge $E \subset\subset (a,b)$ mit $u > 0$ in E. Damit auch $u_\varepsilon \geq c_0$ in U gleichmäßig für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$, eine Konstante $c_0 > 0$, und eine Nicht-Null Menge $U \subset\subset E$. Wählen wir $\varphi > 0$ auf U, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \overline{E}$, so folgt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_E u_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x > 0,$$

ein Widerspruch zu (2.5). Damit haben wir gezeigt

$$u = 0 \qquad \text{fast überall in } E.$$

Da dies für alle messbaren Mengen $E \subset\subset (a,b)$ gilt, ist der Satz bewiesen. $\square$

Mit dem Beweis der Theoreme 2.2 und 2.3 können wir nunmehr unsere Untersuchung der 1. Variation von F fortsetzen.

Korollar 2.1 *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M)$ *und* F *stationär in* $u \in C^2((a,b);\,\mathbb{R}^M)$. *Dann gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot,u,u') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial p}(\cdot,u,u') = 0 \qquad \textit{in } (a,b). \tag{2.6}$$

Beweis: Wie bereits in (2.2) gezeigt, gilt

$$\int_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x))\Big]\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \;\; \forall\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}^M).$$

Wir wählen $\varphi = (0,\ldots,\tilde{\varphi},0,\ldots,0)$, wobei die Nicht-Null-Komponente $\tilde{\varphi}$ an der i-ten Stelle ist, und wenden Satz 2.2 an. Dann folgt

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(\cdot,u,u') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial p_i}(\cdot,u,u') = 0 \qquad \text{für } 1 \leq i \leq M. \quad \square \tag{2.7}$$

Die Gleichung (2.6) bzw. in Koordinaten-Schreibweise die Gleichungen (2.7) sind die sogenannten *Euler-Lagrange-Gleichungen* des Variationsproblems (1.5).

Beispiel: Für $u \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ definieren wir

$$F(u) := \int_a^b \left[c(x)u^2(x) + u'(x)^2\right] \mathrm{d}x,$$

d.h. $M = 1$ und $f(x,z,p) := c(x)z^2 + p^2$. Als Euler-Lagrange-Gleichung erhalten wir

$$c(x)u(x) - u''(x) = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung (vom Sturm-Liouville-Typ). $\square$

Beispiel: Für $u \in C^2([a,b];\mathbb{R}^3)$, eine Konstante $e > 0$ und ein differenzierbares Potential $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachten wir

$$F(u) := \int_a^b \frac{e}{2}|u'(x)|^2 + V(u(x))\,\mathrm{d}x.$$

Es gilt also $M = 3$, $f(x,z,p) := V(z) + \frac{e}{2}|p|^2$. Als Euler-Lagrange-Gleichung erhalten wir

$$\frac{\partial V}{\partial u_i}(u(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[eu_i'(x)] = 0, \qquad x \in (a,b),\ 1 \leq i \leq 3.$$

Dies führt auf

$$eu_i''(x) = \frac{\partial V}{\partial u_i}(u(x)), \qquad x \in (a,b),\ 1 \leq i \leq 3. \tag{2.8}$$

Man kann x als Zeit interpretieren, u als Ortsvektor, V als das elektrostatische Potential, e als die Elektronen-Ladung.

Wenn wir alternativ e als die Masse eines Partikels interpretieren, so beschreibt (2.8) auch die Bewegung eines Massenpunktes im Kraftfeld V. $\square$

Das folgende Theorem fasst Satz 2.1 und Korollar 2.1 zusammen.

Theorem 2.4 *Sei $u \in C^2((a,b);\mathbb{R}^M) \cap C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$, $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$, u lokales Minimum von F, d.h. für ein $\delta > 0$ klein gelte*

$$F(u) \leq F(v) \qquad \forall v \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M) \text{ mit } \|u - v\|_{C^1([a,b];\mathbb{R}^M)} < \delta$$

und $v = u$ auf $\partial[a,b]$. Dann erfüllt u die Euler-Lagrange-Gleichungen (2.6).

Beweis: Es gilt

$$F(u) \leq F(v) \qquad \text{für alle } v \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M) \text{ mit } \|u - v\|_{C^1([a,b];\mathbb{R}^M)} \leq \delta.$$

Nach Satz 2.1 ist F stationär in u. Wegen $u \in C^2$ gilt Korollar 2.1, so dass die Euler-Lagrange-Gleichung (2.6) gilt. $\square$

Nachfolgend beweisen wir, dass die Euler-Lagrange-Gleichung (2.6) auch gilt, wenn $u \in C^1((a,b);\mathbb{R}^N)$. Dazu benötigen wir folgendes

Theorem 2.5 *Sei F stationär in $u \in C^1((a,b);\mathbb{R}^M)$ und $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M)$. Dann gilt: Für alle $d \in (a,b)$ existiert ein $c_d \in \mathbb{R}^M$ mit*

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) = c_d + \int_d^x \frac{\partial f}{\partial z}(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y \qquad \text{für } x \in (a,b). \tag{2.9}$$

Zusatz*: Falls sogar $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$, so gilt (2.9) mit $d = a$ und $c_d = c_a$ für alle $x \in [a,b]$.*

Beweis: Da u kritischer Wert von F ist, gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}^M)$

$$\int_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x))\cdot\varphi'(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,u(x),u'(x))\cdot\varphi(x)\Big]\,\mathrm{d}x = 0$$

und nach partieller Integration

$$\int_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) - \Big(\int_d^x \frac{\partial f}{\partial z}(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y\Big)\Big]\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}^M)$.

Nach dem Fundamental-Lemma von Du Bois-Reymond (folgendes Theorem 2.6) existiert ein $c_d \in \mathbb{R}^M$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) - \int_d^x \frac{\partial f}{\partial z}(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y = c_d \qquad \text{für alle } x \in (a,b).$$

Zusatz: Gilt sogar $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$, so kann man in obiger Argumentation $d = a$ wählen. Man erhält (2.9) mit $d = a$, $c_d = c_a$ zunächst auf (a,b), aber wegen der stetigen Fortsetzbarkeit aller Terme als Funktion von x dann auch auf ganz $[a,b]$. $\square$

Theorem 2.6 (Fundamental-Lemma von Du Bois-Reymond) *Die Funktion $u \in C^0((a,b);\mathbb{R}^M)$ erfülle*

$$\int_a^b u(x)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}^M).$$

Dann existiert ein $c_0 \in \mathbb{R}^M$ mit $u(x) \equiv c_0$ für alle $x \in (a,b)$.

Beweis: Wie schon früher bemerkt genügt es, den Satz für alle $\varphi \in C_0^1([a,b];\mathbb{R}^M)$ zu zeigen. Wir setzen

$$c_0 := \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x,$$

so dass

$$\int_a^b \big(c_0 - u(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.10}$$

Speziell wählen wir $\varphi(x) := \int_a^x \big(c_0 - u(y)\big)\,\mathrm{d}y$. Dann ist $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ und $\varphi \in C_0^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)$. Für diese Wahl von φ ergibt sich

$$0 = \int_a^b u(x)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\cdot\big(c_0 - u(x)\big)\,\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

Wir multiplizieren (2.10) mit c_0 und subtrahieren dann (2.11). Es folgt

$$\int_a^b c_0\cdot\big(c_0 - u(x)\big)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)\cdot\big(c_0 - u(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0,$$

was äquivalent ist zu

$$\int_a^b \big|c_0 - u(x)\big|^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

wobei $|v|^2 = v\cdot v$ das Quadrat der Euklidischen Norm eines Vektors v bezeichnet. Daher gilt $u(x) = c_0$ für alle $x \in (a,b)$. □

Korollar 2.2 *Sei $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M)$ und F stationär in $u \in C^1((a,b);\,\mathbb{R}^M)$, so erfüllt u die Euler-Lagrange-Gleichung (2.6) in (a,b). Für $u \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)$ erfüllt u die Gleichung (2.6) in $[a,b]$.*

Beweis: Sei $d \in (a,b)$ beliebig. Dann gilt die Du Bois-Reymond-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) = c_d + \int_d^x \frac{\partial f}{\partial z}(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y \qquad \text{für alle } x \in (a,b) \tag{2.12}$$

für ein geeignetes $c_d \in \mathbb{R}^M$. Wir wählen $x_0 \in (a,b)$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x_0) \in (a,b)$ (d.h. $\varepsilon < \min\{x_0 - a, b - x_0\}$).

Offensichtlich ist die rechte Seite von (2.12) differenzierbar in x, damit ist also auch die linke Seite differenzierbar in x, genauer

$$\frac{\partial f}{\partial p}(\cdot,u,u') \in C^1(B_\varepsilon(x_0);\,\mathbb{R}^M).$$

Wir können also nach x differenzieren und erhalten die Euler-Lagrange-Gleichung (2.6) in $B_\varepsilon(x_0)$. Wegen $x_0 \in (a,b)$ beliebig folgt die Gültigkeit von (2.6) in (a,b).

Falls $u \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)$, so wählen wir $d = a$ und erhalten nach Theorem 2.5 die Beziehung (2.12) mit $c_a \in \mathbb{R}^M$ für alle $x \in [a,b]$. Die rechte Seite von (2.12) ist in $C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)$, also gilt dies auch für die linke Seite von (2.12). Dies beweist, dass die Euler-Lagrange-Gleichung (2.6) in $[a,b]$ gilt. □

2.2 Natürliche Randbedingungen

Bislang haben wir das Randverhalten von Extremalen u noch nicht untersucht und immer Testfunktionen mit Nullrandwerten eingesetzt. Wie Korollar 2.2 zeigt, gelten unter bestimmten Voraussetzungen die Euler-Lagrange-Gleichungen jedoch bis zum Rand von $[a, b]$. Auch bei der 1. Variation $\delta F(u, \varphi)$ in Abschnitt 2.1 hatten wir beliebige $\varphi \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^M)$ zugelassen. Für das Randverhalten einer kritischen Funktion u gilt nun folgendes Theorem.

Theorem 2.7 (Natürliche Randbedingungen) *Es gelte*

$$\delta F(u, \varphi) = 0 \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty([a, b]; \mathbb{R}^M),$$

wobei $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^M)$ und $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$. Dann erfüllt u die natürlichen Randbedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial p}(a, u(a), u'(a)) = \frac{\partial f}{\partial p}(b, u(b), u'(b)) = 0.$$

Beweis: Nach Korollar 2.2 gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x)) = 0 \qquad \text{für alle } x \in [a, b]. \tag{2.13}$$

Jetzt nutzen wir aus, dass $\delta F(u, \varphi) = 0$ für φ aus dem größeren Raum $C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^M)$ gilt. Bei der partiellen Integration fallen dabei Randterme ab:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta F(u, \varphi) \\ &= \int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x) \Big) \, \mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x)) \Big) \cdot \varphi(x) \, \mathrm{d}x}_{=0 \quad \text{nach (2.13)}} \\ &\quad + \Big[\frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x) \Big]_{x=a}^{x=b}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dabei wurde beim Übergang zur 3. Zeile partiell integriert.

Sei c ein später zu spezifizierender Vektor. Zu c wählen wir die Testfunktion

$$\varphi_c(x) := \frac{x - b}{a - b}\, c \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Es gilt $\varphi_c \in C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^M)$, $\varphi_c(a) = c$, $\varphi_c(b) = 0$. Also φ_c zulässig in (2.14) und

$$\frac{\partial f}{\partial p}(a, u(a), u'(a)) \cdot c = 0.$$

Wählen wir speziell $c := \frac{\partial f}{\partial p}(a, u(a), u'(a))$, so erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial p}(a, u(a), u'(a)) = 0.$$

Analog zeigt man $\frac{\partial f}{\partial p}(b, u(b), u'(b)) = 0$. $\square$

Natürliche Randbedingungen treten zum Beispiel bei der Lösung sogenannter Freier Randwertprobleme auf, bei denen Grenzflächen durch die Lösung selbst bestimmt werden. Freie Randwertprobleme sind von großem Interesse bei partiellen Differentialgleichungen und in der Theorie von Minimalflächen.

Beispiel (Natürliche Randbedingungen für das Dirichlet-Integral)

Wir betrachten

$$F(u) := \frac{1}{2} \int\limits_a^b (u'(x))^2 \, \mathrm{d}x \to \min \tag{2.15}$$

in der Klasse $C^1([a,b]; \mathbb{R}^M)$.

Sei $u \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^M)$ ein Minimierer von F. Nach den Du Bois-Reymond-Gleichungen gilt dann $u' \equiv \text{const}$ auf $[a,b]$, d.h.

$$u(x) = \alpha x + \beta \qquad \text{für alle } x \in [a,b]$$

für geeignete $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Als Minimierer erfüllt u die Ungleichungen

$$F(u) \leq F(u + \varepsilon\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^M),$$

im besonderen also

$$\delta F(u, \varphi) = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^M).$$

Da man sich wieder auf Testfunktionen aus C^1 beschränken kann (an Stelle glatter Funktionen φ), sind die Voraussetzungen von Theorem 2.7 erfüllt. Also gilt

$$\frac{\partial f}{\partial p}(a, u(a), u'(a)) = 0 \Leftrightarrow u'(a) = 0, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p}(b, u(b), u'(b)) = 0 \Leftrightarrow u'(b) = 0. \tag{2.17}$$

Dies sind die natürlichen Randbedingungen zu (2.15). Aus (2.16), (2.17) folgt $\alpha = 0$, also

$$u(x) \equiv \beta.$$

Die Gleichungen (2.16), (2.17) bedeuten geometrisch, dass die minimierende Funktion mit den Wänden einen rechten Winkel aufspannt.

Vernachlässigt man die Oberflächenspannung, so kann dieses Rand-Verhalten etwa bei Seifenhäuten beobachtet werden. $\square$

2.3 Erhaltungssätze

Eine weitere wichtige Folgerung aus den Euler-Lagrange-Gleichungen ergibt sich in Form von Erhaltungssätzen, im besonderen für den Hamilton-Operator H mechanischer Systeme.

Theorem 2.8 *Sei $f = f(z,p) \in C^2(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$, $u \in C^2((a,b); \mathbb{R}^M)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(u(x), u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial p}(u(x), u'(x)) = 0 \qquad \text{für alle } x \in (a,b).$$

Definieren wir

$$H(z,p) := p \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(z,p) - f(z,p),$$

so gilt

$$H(u(x), u'(x)) \equiv \mathrm{const} \qquad \text{in } (a,b).$$

Beweis: Eine Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[H(u(x),u'(x))\big] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[p(x)\cdot\frac{\partial f}{\partial p}(z(x),p(x)) - f(z(x),p(x))\Big] \\
&= u''(x)\cdot\frac{\partial f}{\partial p}(z(x),p(x)) + p(x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial p}(z(x),p(x))\Big) \\
&\quad -\frac{\partial f}{\partial z}(z(x),p(x))\cdot u'(x) - \frac{\partial f}{\partial p}(z(x),p(x))\cdot u''(x) \\
&= u'(x)\cdot\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial p}(z(x),p(x)) - \frac{\partial f}{\partial z}(z(x),p(x))\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Beziehung ergibt sich, da der Term $[\ldots]$ nach der Euler-Lagrange-Gleichung verschwindet. □

Anwendung: Energie-Erhaltungssätze.

Sei

$$f(z,p) := \frac{m}{2}|p|^2 - V(z)$$

für z, $p \in \mathbb{R}^3$, $m > 0$ gegebene Masse, $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein gegebenes Potential.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
H(z,p) &= p\cdot\frac{\partial f}{\partial p}(z,p) - f(z,p) \\
&= p\cdot(mp) - \frac{m}{2}|p|^2 + V(z) = \frac{m}{2}|p|^2 + V(z).
\end{aligned}$$

Hier ist H die Gesamt-Energie, x entspricht der Zeit, z entspricht der Ortsänderung, z.B. der Verschiebung von Atomen oder der Bahnkurve von Teilchen, p ist dann die Geschwindigkeit. Anstelle von u schreiben wir nachfolgend X, um die in der Physik übliche Formulierung zu erhalten.

Nach Theorem 2.8 gilt

$$\frac{m}{2}|\dot{X}|^2 + V(X(t)) \equiv \mathrm{const} \qquad \text{in } t$$

für alle Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{X}(t) = -\frac{\partial V}{\partial X}(X(t)) = -V'(X(t)). \tag{2.18}$$

Die Gleichung (2.18) entspricht dabei der Euler-Lagrange-Gleichung für das Minimierungs-Problem.

Bemerkung: Nicht jedes u, das den Energie-Erhaltungssatz erfüllt, ist umgekehrt Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung.

Dazu folgendes

Beispiel Sei $u \equiv c$ (eine Konstante) auf (a, b) und $f(z, p) \in C^2(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$ mit $f(c, 0) = -h \in \mathbb{R}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(c, 0) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(u(x), u'(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[u'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(u(x), u'(x)) - f(u(x), u'(x))\Big] \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(c, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$H(u(x), u'(x)) \equiv \text{const} \qquad \text{auf } (a, b).$$

Also auch

$$H(u(x), u'(x)) \equiv H(c, 0) = -f(c, 0) = h.$$

Andererseits

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{\partial f}{\partial p}(c, 0)\Big] - \frac{\partial f}{\partial z}(c, 0) = -\frac{\partial f}{\partial z}(c, 0) \neq 0,$$

also löst u die Euler-Lagrange-Gleichung nicht. $\square$

2.4 Innere Variation, Erdmann-, Noether-Gleichung

Bisher haben wir immer die Variation um einen Funktionswert u (bzw. u') in der Form $u + \varepsilon\varphi$ (bzw. $u' + \varepsilon\varphi'$) betrachtet.

Nachfolgend betrachten wir die Variation als Komposition eines Minimierers u und eines Diffeomorphismus $\xi(\cdot, \varepsilon)$ in der Form

$$v(t, \varepsilon) := u \circ \xi(t, \varepsilon).$$

Dabei parametrisiert ε eine Familie von Diffeomorphismen,

$$\xi(t, \varepsilon) \in C^2([a, b] \times (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0);\, [a, b]).$$

Für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ ist $\xi(\cdot, \varepsilon)$ ein Diffeomorphismus von $[a, b]$ auf $[a, b]$. Ferner gelte

$$\begin{aligned}
\xi(a, \varepsilon) &= a, \quad \xi(b, \varepsilon) = b \qquad \text{für alle } \varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0), && (2.19)\\
\xi(t, 0) &= t \qquad \text{für alle } t \in (a, b). && (2.20)
\end{aligned}$$

Definition: Die Familie $(\xi(\cdot, \varepsilon))_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)}$ mit den obigen Eigenschaften heißt *zulässige Parameter-Variation*. Die Funktionenschar $v(t, \varepsilon) := u(\xi(t, \varepsilon))$ heißt *zulässige innere Variation*.

Bemerkung Es gilt nach (2.19), (2.20)

$$\begin{aligned}
v(a, \varepsilon) &= u(\xi(a, \varepsilon)) = u(a), \\
v(b, \varepsilon) &= u(\xi(b, \varepsilon)) = u(b), \\
v(t, 0) &= u(\xi(t, 0)) = u(t).
\end{aligned}$$

Wir setzen noch

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &:= \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(t,0), \\
\Psi(\varepsilon) &:= F(v(\cdot,\varepsilon)) = F(u(\xi(\cdot,\varepsilon))) \\
&= \int_a^b f(t, v(t,\varepsilon), \frac{\partial v}{\partial t}(t,\varepsilon))\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Falls nun $F(u) \leq F(v(\cdot,\varepsilon))$ für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ und $\Psi \in C^1((-\varepsilon_0, +\varepsilon_0); \mathbb{R})$, so gilt $\Psi'(0) = 0$, d.h. die erste innere Variation von F an der Stelle u verschwindet.

Definition: $\partial F(u, \lambda) := \Psi'(0)$ heißt die *1. innere Variation* von F an der Stelle u in Richtung des Variationsvektorfeldes λ.

Wir nennen den Ausdruck $\Psi'(0)$ ab jetzt immer die 1. innere Variation, auch wenn wir die Annahmen an u, f und λ abschwächen sollten.

Theorem 2.9 (Innere Variation von F) *Sei $u \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^M)$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$ und $\lambda = \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0)$ das Variationsvektorfeld einer zulässigen Parametervariation $(\xi(\cdot,\varepsilon))_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\partial F(u,\lambda) &= \int_a^b \Big[\Big((u'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x)) - f(x, u(x), u'(x)) \Big) \lambda'(x) \\
&\qquad - \frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x), u'(x)) \lambda(x) \Big] \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Beweis: Für $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ sei $\tau(x,\varepsilon) := (\xi(x,\varepsilon))^{-1}$, d.h.

$$\tau(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) = t \qquad \text{für alle } t \in [a,b]. \tag{2.21}$$

Partielles Ableiten von (2.21) nach t bzw. ε ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial x}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\varepsilon) &= 1, &(2.22)\\
\frac{\partial \tau}{\partial x}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon) + \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) &= 0. &(2.23)
\end{aligned}$$

Wegen $\xi(t,0) = t$ nach (2.20) folgt $\tau(x,0) = x$, daher

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(x,0) = 1.$$

Betrachten wir (2.23) an der Stelle $\varepsilon = 0$, so folgt

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(t,0)\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(t,0) + \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}(t,0) = 0 \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

Da $\frac{\partial \tau}{\partial x}(t,0) = 1$ und $\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(t,0) = \lambda(t)$, schreibt sich dies als

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}(x,0) = -\lambda(x) \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Für jede zulässige Parameter-Variation gilt $\xi(t,\varepsilon) \in C^2([a,b] \times (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0))$. Damit $\tau(x,\varepsilon) \in C^2([a,b] \times (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0))$.

Aus $\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}(x,0) = -\lambda(x)$ für alle $x \in [a,b]$ folgt

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial\varepsilon}(x,0) = \frac{\partial^2\tau}{\partial\varepsilon\partial x}(x,0) = -\lambda'(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\Psi(\varepsilon) &= \int_a^b f\Big(t, v(t,\varepsilon), \frac{\partial v}{\partial t}(t,\varepsilon)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f\Big(\tau(x,\varepsilon), u(x), u'(x)\frac{1}{\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)}\Big)\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x. \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Hierbei wurde zum Erhalt der 2. Zeile substituiert mit $t = \tau(x,\varepsilon) = \tau(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ und verwendet, dass $v(t,\varepsilon) = u(x)$ ist, dass

$$\mathrm{d}t = \frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x,$$

sowie

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,\varepsilon) = u'(\xi(t,\varepsilon))\frac{\partial\xi}{\partial t}(t,\varepsilon) = u'(x)\frac{1}{\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)}.$$

Mit (2.24) ergibt sich nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon}(\varepsilon) &= \int_a^b \Bigg[\frac{\partial f}{\partial x}\Big(\tau(x,\varepsilon), u(x), u'(x), \frac{1}{\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)}\Big)\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}(x,\varepsilon) \\ &\quad + u'(x)\cdot\frac{\partial f}{\partial p}\Big(\tau(x,\varepsilon), u(x), u'(x), \frac{1}{\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)}\Big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big(\frac{1}{\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)}\Big)\Bigg]\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_a^b f\Big(\tau(x,\varepsilon), u(x), u'(x), \frac{1}{\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)}\Big)\frac{\partial^2\tau}{\partial\varepsilon\partial x}(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir $\tau(x,0) = x$, $\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,0) = 1$, und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big(\frac{1}{\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)}\Big) = -\frac{\frac{\partial^2\tau}{\partial\varepsilon\partial x}(x,\varepsilon)}{\Big[\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,\varepsilon)\Big]^2}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon}(0) &= \int_a^b \Bigg[\frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x), u'(x))\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}(x,0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x))\cdot u'(x)\frac{(-\frac{\partial^2\tau}{\partial\varepsilon\partial x}(x,0))}{\Big[\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,0)\Big]^2}\Bigg]\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,0)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\frac{\partial^2\tau}{\partial\varepsilon\partial x}(x,0)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Wir verwenden, dass

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}(x,0) = -\lambda(x), \qquad \frac{\partial^2 \tau}{\partial \varepsilon \partial x}(x,0) = -\lambda'(x),$$

und

$$\frac{(-\frac{\partial^2 \tau}{\partial \varepsilon \partial x}(x,0))}{\left[\frac{\partial \tau}{\partial x}(x,0)\right]^2} = \lambda'(x).$$

Damit erhalten wir das Endergebnis

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}(0) &= \int_a^b \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) \cdot u'(x) - f(x,u(x),u'(x))\right]\lambda'(x) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial f}{\partial x}(x,u(x),u'(x))\lambda(x) \right\} \mathrm{d}x. \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 2.10 *Es gelte $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$. Die Funktion $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$ sei Minimierer, d.h. es gelte*

$$F(u) \leq F(u(\xi(\cdot,\varepsilon)))$$

für alle zulässigen Parametervariationen $\xi(\cdot,\varepsilon)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial F(u,\lambda) &= \int_a^b \left\{ \left[u'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) - f(x,u(x),u'(x))\right]\lambda'(x) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial f}{\partial x}(x,u(x),u'(x))\lambda(x) \right\} \mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R})$.

Beweis: Sei $\lambda \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R})$ beliebig. Wir wollen Theorem 2.9 anwenden, müssen also im wesentlichen zeigen, dass

$$\lambda(x) = \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(x,0)$$

gilt. Zu gegebenem λ und $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ definieren wir

$$\tau(x,\varepsilon) := x - \varepsilon\lambda(x). \tag{2.25}$$

Es gilt $\frac{\partial \tau}{\partial x}(x,\varepsilon) = 1 - \varepsilon\lambda'(x) \neq 0$ für ε_0 hinreichend klein. Es folgt die Existenz der Umkehr-Abbildung

$$\xi(t,\varepsilon) := \tau(t,\varepsilon)^{-1}$$

für ε_0 hinreichend klein.

Nach (2.25) folgt

$$\tau(a,\varepsilon) = a, \qquad \tau(b,\varepsilon) = b, \qquad \tau(x,0) = x.$$

Diese Eigenschaften implizieren, dass

$$\xi(a,\varepsilon) = \xi(\tau(a,\varepsilon)) = a, \qquad \xi(b,\varepsilon) = \xi(\tau(b,\varepsilon)) = b, \qquad \xi(t,0) = t.$$

Daher ist $(\xi(\cdot,\varepsilon))_{\varepsilon\in(-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)}$ eine zulässige Parameter-Variation.

Aus $t = \tau(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\tau(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) \\ &= \frac{\partial\tau}{\partial x}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\frac{\partial\xi}{\partial\varepsilon}(t,\varepsilon) + \frac{\partial\xi}{\partial\varepsilon}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) \end{aligned}$$

und für $\varepsilon = 0$ wegen $\xi(t,0) = t$ gilt

$$0 = \frac{\partial\tau}{\partial x}(t,0)\frac{\partial\xi}{\partial\varepsilon}(t,0) + \frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}(t,0),$$

also wegen $\frac{\partial\tau}{\partial x}(t,0) = 1$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\varepsilon}(t,0) = -\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}(t,0) = \lambda(t),$$

wobei (2.25) benutzt wurde.

Wir können also Theorem 2.9 anwenden und erhalten

$$\Psi'(0) = \partial F(u,\lambda) = 0. \quad \square$$

Theorem 2.11 (Gleichungen von Erdmann und Noether) *Es gelte $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$ und $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M)$. Falls*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F(u(\xi(\cdot,\varepsilon)))\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

für alle zulässigen Parameter-Variationen ξ, so gilt:

Für alle $d \in (a,b)$ existiert eine reelle Konstante c_d mit

$$H(x,u(x),u'(x)) = c_d - \int_d^x \frac{\partial f}{\partial x}(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y \qquad \text{für alle } x \in (a,b), \quad (2.26)$$

wobei $H(x,z,p) := p\cdot\frac{\partial f}{\partial p}(x,z,p) - f(x,z,p)$. Ferner gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x,u(x),u'(x)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,u(x),u'(x)) = 0 \qquad \text{für alle } x \in (a,b). \quad (2.27)$$

Zusatz*: Ist $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$, so gilt (2.26) mit a statt d und c_a statt c_d und Gleichung (2.27) gilt für alle $x \in [a,b]$.*

Bemerkungen:

- (2.26) heißt *Erdmann-Gleichung*, (2.27) ist die *Noether-Gleichung*.
- Für den Spezialfall $f = f(z,p)$ und $u \in C^2((a,b);\mathbb{R}^M)$ folgt (2.26) aus Theorem 2.8 und $H(z,p) \equiv \text{const}$.

Beweis: Sei $\lambda \in C_0^\infty((a,b);\, \mathbb{R}^M)$. Wie in Theorem 2.10 gezeigt, ist mit

$$\tau(x,\varepsilon) := x - \varepsilon\lambda(x)$$

für $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und ε_0 klein genug

$$(\xi(t,\varepsilon))_{\varepsilon\in(-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)} := (\tau(t,\varepsilon)^{-1})_{\varepsilon\in(-\varepsilon_0,+\varepsilon_0)}$$

eine zulässige Parameter-Variation mit Variationsvektorfeld λ. Sei $\operatorname{supp}(\lambda) = K \subset\subset (a,b)$. Wenden wir Theorem 2.9 an für $u \in C^1((a,b);\, \mathbb{R}^M)$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 = \partial F(u,\lambda) &= \int\limits_K \left[\Big(u'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) - f(x,u(x),u'(x)) \Big) \lambda'(x) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial f}{\partial x}(x,u(x),u'(x))\lambda(x) \right] \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^b \left[\Big(u'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) - f(x,u(x),u'(x)) \Big) \lambda'(x) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial f}{\partial x}(x,u(x),u'(x))\lambda(x) \right] \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Wir integrieren wie bei der Herleitung der Du Bois-Reymond-Gleichung für ein beliebiges $d \in (a,b)$ den Term mit λ partiell und erhalten

$$\int\limits_a^b \left[u'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) - f(x,u(x),u'(x)) \right. \\ \left. + \int\limits_d^x \frac{\partial f}{\partial x}(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y \right] \lambda'(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nach dem Fundamental-Lemma von Du Bois-Reymond gibt es daher eine Konstante $c_d \in \mathbb{R}$ mit

$$u'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) - f(x,u(x),u'(x)) + \int\limits_d^x \frac{\partial f}{\partial x}(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y = c_d.$$

Hieraus folgt die Erdmann-Gleichung (2.26). Die Noether-Gleichung (2.27) folgt aus (2.26) durch Differentiation. Dazu sei $x_0 \in (a,b)$ und $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(x_0) \subset (a,b)$. Dann ist

$$f(x) = \int\limits_d^x \frac{\partial f}{\partial x}(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y \in C^1(B_\delta(x_0)).$$

Hieraus folgt die Noether-Gleichung (2.27) für alle $x \in B_\delta(x_0)$. Wegen $x_0 \in (a,b)$ beliebig gilt (2.27) dann für alle $x \in (a,b)$.

Zusatz: Falls $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$, dann können alle Terme in (2.26), (2.27) auf $[a,b]$ stetig fortgesetzt werden. $\square$

Beispiel: Sei $H(z,p) \in C^1(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$ mit

$$H(z,tp) = t^2 H(z,p) \qquad \text{für alle } t > 0. \tag{2.28}$$

Gleichung (2.28) besagt, dass H *positiv homogen vom Grad 2* in p ist. Differenzieren wir (2.28) nach t, so folgt

$$\frac{\partial H}{\partial p}(z,t,p) \cdot p = 2t\, H(z,p) \qquad \text{für alle } t > 0.$$

Speziell für $t = 1$ folgt $\frac{\partial H}{\partial p}(z,p) \cdot p = 2H(z,p)$, was äquivalent ist zu (man vergleiche mit der Definition von H in Theorem 2.11)

$$p \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - H = H.$$

Aus der Noether-Gleichung (2.27) folgt

$$H(u(x), u'(x)) \equiv \text{const} \qquad \text{auf } [a,b] \tag{2.29}$$

für alle $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$ mit $\partial \widehat{H}(u,\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in C_0^\infty((a,b))$, wobei

$$\widehat{H}(u) := \int_a^b H(u(x), u'(x))\, \mathrm{d}x.$$

Fordern wir ferner

$$H(z,p) > 0 \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}, \tag{2.30}$$

und u erfülle $u(a) \neq u(b)$, so folgt aus dem Mittelwertsatz die Existenz eines $\xi \in (a,b)$ mit $u'(\xi) \neq 0$. Aus (2.30) und (2.29) folgt daher

$$0 < H(u(\xi), u'(\xi)) = H(u(x), u'(x)) \qquad \text{für } x \in [a,b].$$

Aufgrund der Homogenität von H ist daher

$$u'(x) \neq 0 \qquad \text{auf } [a,b]. \quad \square$$

Wir erhalten also automatisch, dass $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$ eine reguläre Kurve ist. Dies ist ein Vorteil der inneren Variation, da extremale Funktionen immer regulär parametrisiert werden. Dies ist z.B. hilfreich bei Hindernis-Problemen. Für die äußere Variation mit $u + \varepsilon\varphi$ kann es schwierig sein, Zulässigkeit zu erzielen. Wir werden dies später ausnutzen.

2.5 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

Bislang wurden (mit Ausnahme der einleitenden Beispiele) Variations-Probleme ohne Nebenbedingungen behandelt. Nachfolgend führen wir die wichtigsten Problem-Klassen auf.

Wir betrachten

$$F(v) := \int\limits_a^b f(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x \to \min$$

für $v \in V$, wobei üblicherweise

$$\begin{aligned} V &= \{v \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M) \mid \langle\text{Bedingung für } v(x) \text{ für } x = a \text{ und } x = b\rangle, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \langle\text{andere Nebenbedingung für } v\rangle\}. \end{aligned}$$

Nachfolgend betrachten wir

$$V = \{v \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M) \mid v(a) = \alpha,\ v(b) = \beta,\ G(v) = c\}$$

für feste α, $\beta \in \mathbb{R}^M$, $c \in \mathbb{R}$.

1. Klasse: Isoperimetrische Nebenbedingungen

Hier gilt

$$G(v) := \int\limits_a^b g(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Für das Problem der Dido war $M = 1$, $\alpha = \beta = 0$, $c = L > 0$,

$$\begin{aligned} g(x, v(x), v'(x)) &= \sqrt{1 + (v'(x))^2}, \\ f(x, u(x), u'(x)) &= -u(x), \end{aligned}$$

wobei das negative Vorzeichen in der letzten Zeile daher rührt, dass im ursprünglichen Problem der Dido die Zielfunktion maximiert wird.

2. Klasse: Holonome Nebenbedingungen

Diese sind charakterisiert durch

$$g(x, v(x), v'(x)) = g(x, v(x)) = 0 \qquad \text{für alle } x \in (a, b),$$

was auf

$$\begin{aligned} V &= \{v \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^M) \mid v(a) = \alpha,\, v(b) = \beta, \\ &\qquad\qquad g(x, v(x)) = 0 \text{ für alle } x \in (a,b)\} \end{aligned}$$

führt.

3. Klasse: Nicht-holonome Nebenbedingungen

Nicht-holonome Systeme werden durch die Nebenbedingung

$$g = g(x, v(x), v'(x)) = 0 \qquad \text{für alle } x \in (a, b)$$

beschrieben. Wir haben dann

$$\begin{aligned} V &= \Big\{v \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^M) \;\Big|\; v(a) = \alpha,\, v(b) = \beta, \\ &\qquad\qquad g(x, v(x), v'(x)) = 0 \text{ für alle } x \in (a,b)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Beispiel für holonome Nebenbedingungen:

Seien $P_1 \neq P_2 \in \mathbb{R}^3$ zwei Punkte mit $|P_1|^2 = |P_2|^2 = 1$, $M = 3$, und

$$F(v) := \int_a^b |v'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \to \min$$

für

$$\begin{aligned} V &= \Big\{v \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^M) \;\Big|\; v(a) = P_1,\, v(b) = P_2, \\ &\qquad\qquad |v(x)|^2 = 1 \text{ für alle } x \in (a,b)\Big\}. \end{aligned}$$

Es wird also die Länge von Kurven auf S_2 minimiert mit Anfangspunkt P_1 und Endpunkt P_2. $\square$

Beispiel für nicht-holonome Nebenbedingungen:

Sei $M = 3$ und P_1, P_2 wie im letzten Beispiel, sowie

$$F(v) := \int_a^b \varrho(v(x)) \,\mathrm{d}x \to \min$$

für

$$\begin{aligned} V &= \Big\{v \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^M) \;\Big|\; v(a) = P_1,\, v(b) = P_2, \\ &\qquad\qquad |v(x)|^2 = 1,\, |v'(x)|^2 = 1 \text{ für alle } x \in (a,b)\Big\}. \end{aligned}$$

Minimiert wird also das Gewicht von Kurven mit Dichte $\varrho > 0$ auf S_2 mit Anfangspunkt P_1 und Endpunkt P_2, die nicht dehnbar sind. $\square$

4. Klasse: Ungleichungs-Nebenbedingungen

Diese sind charakterisiert durch $g(x, v(x), v'(x)) \geq 0$.

Beispiel (Hindernis-Problem): Sei $-\infty < a \leq -1 < +1 \leq b < +\infty$ und

$$F(v) := \int_a^b \sqrt{1 + |v'(x)|^2}\,\mathrm{d}x \to \min$$

für

$$v \in V := \{v \in C^2([a,b];\mathbb{R}) \mid v(a) = v(b) = 0,\ v(x) \geq 1 - |x|\}.$$

Minimiert wird also die Länge von glatten Kurven oberhalb des Hindernisses $1 - |x|$.

Problem hier: Für $a = -1$, $b = +1$ ist die kürzeste Verbindung $u(x) = 1 - |x|$ nicht in $C^1([-1,+1];\mathbb{R})$. Daher besitzt das Optimierungs-Problem in diesem Fall keine Lösung. $\square$

Theorem 2.12 (Lagrangesche Multiplikatoren-Regel) *Für $f, g \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$ sei $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M)$ lokale Lösung des Variations-Problems*

$$\int_a^b f(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x \to \min$$

für $v \in V$ mit

$$V := \{v \in C^1([a,b];\mathbb{R}^M) \mid v(a) = \alpha,\ v(b) = \beta,\ G(v) = c\}$$

für gegebene α, $\beta \in \mathbb{R}^M$, $c \in \mathbb{R}$ und

$$G(v) := \int_a^b g(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Weiter existiere ein $\zeta \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}^M)$ mit $\delta G(u,\zeta) \neq 0$. Dann gibt es einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass u extremal ist für $F + \lambda G$, d.h.

$$\delta F(u,\varphi) + \lambda \delta G(u,\varphi) = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}^M) \tag{2.32}$$

und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{\partial f}{\partial p}(\cdot,u,u') + \lambda\frac{\partial g}{\partial p}(\cdot,u,u')\Big] - \Big[\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot,u,u') + \lambda\frac{\partial g}{\partial z}(\cdot,u,u')\Big] = 0 \qquad \text{auf } [a,b]. \tag{2.33}$$

Beweis: Sei

$$\psi := \frac{\zeta}{\delta G(u,\varphi)}.$$

Aufgrund der Linearität von $\delta G(u,\cdot)$ folgt

$$\delta G(u,\psi) = 1.$$

Für $\varphi \in C_0^\infty((a,b);\,\mathbb{R}^M)$ und $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ definieren wir

$$\begin{aligned}\Phi(t,\varepsilon) &:= F(u+\varepsilon\varphi+t\psi),\\ \Gamma(t,\varepsilon) &:= G(u+\varepsilon\varphi+t\psi).\end{aligned}$$

Wir betrachten das obige Minimierungsproblem für v mit $\|u-v\|_{C^1([a,b];\,\mathbb{R}^M)} < \overline{\varepsilon}$ für ein kleines $\overline{\varepsilon} > 0$. Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(0,0) &= G(u) = c,\\ \frac{\partial\Gamma}{\partial t}(0,0) &= \delta G(u,\psi) = 1.\end{aligned}$$

Nun verwenden wir den Satz über implizite Funktionen. Demnach existiert ein $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ und eine Funktion $\tau \in C^1((-\varepsilon_1,+\varepsilon_1);\,\mathbb{R})$ mit $\tau(0) = 0$, so dass

$$\Gamma(\tau(\varepsilon),\varepsilon) = c \qquad \text{für alle } \varepsilon \in (-\varepsilon_1,+\varepsilon_1). \tag{2.34}$$

Differenzieren wir (2.34) nach ε und setzen dann $\varepsilon = 0$, so folgt

$$\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}(0) = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon}(0,0) = -\delta G(u,\varphi). \tag{2.35}$$

Da τ stetig ist in einer Umgebung der 0, existiert ein $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, so dass

$$u + \varepsilon\varphi + \tau(\varepsilon)\psi \in V \qquad \text{für alle } \varepsilon \in (-\varepsilon_2,+\varepsilon_2).$$

Da u minimal ist, gilt

$$\Phi(0,0) \leq \Phi(\tau(\varepsilon),\varepsilon) \qquad \text{für alle } \varepsilon \in (-\varepsilon_2,+\varepsilon_2).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Phi(\tau(\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}\\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,0)\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}(0) + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}(0,0)\\ &= \delta F(u,\varphi) + \delta F(u,\psi)(-\delta G(u,\varphi)),\end{aligned}$$

wobei zum Erhalt der letzten Zeile (2.35) verwendet wurde. Setzen wir

$$\lambda := -\delta F(u,\psi),$$

so liefert dies (2.32).

Gleichung (2.33) ist die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung und gilt nach Korollar 2.2. $\square$

Beispiel: Für $M = 1$ betrachten wir das Variationsproblem

$$F(v) := \int\limits_a^b \left(c(x)v^2(x) + v'(x)^2\right)\mathrm{d}x \to \min$$

auf

$$V := \left\{ v \in C^1([a,b];\,\mathbb{R}) \;\middle|\; v(a) = v(b) = 0,\; \int\limits_a^b |v(x)|^2\,\mathrm{d}x = c_1 \neq 0 \right\}.$$

Mit den früheren Notationen ist also $g(x,z,p) = z^2$ und $\frac{\partial g}{\partial z} = 2z$, $\frac{\partial g}{\partial p} = 0$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\delta G(u,\zeta) &= \int_a^b \frac{\partial g}{\partial p}(x,u(x),u'(x)) \cdot \zeta'(x) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,u(x),u'(x))\zeta(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_a^b u(x)\zeta(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Falls $\delta G(u,\zeta) = 0$ für alle $\zeta \in C_0^\infty((a,b))$, so gilt $u \equiv 0$ in (a,b) nach dem Fundamental-Lemma der Variationsrechnung. Es folgt $c_1 = 0$, ein Widerspruch. Also haben wir gezeigt, dass ein $\zeta \in C_0^\infty((a,b))$ existiert mit $\delta G(u,\zeta) \neq 0$. Damit kann Theorem 2.12 angewendet werden. Nach Gleichung (2.33) gilt also für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[2u'(x)\Big] - \Big[2c(x)u(x) + 2\lambda u(x)\Big] = 0 \qquad \text{für alle } x \in [a,b]. \tag{2.36}$$

Mit dem Hamilton-Operator

$$H := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + c$$

schreibt sich (2.36) als das Eigenwert-Problem

$$Hu = -\lambda u. \quad \square$$

2.6 Anwendungen

Wir beenden das Kapitel mit einigen Beispielen von Funktionalen unter Nebenbedingungen.

Beispiel (Problem der Dido): Wir nehmen das Beispiel 2 aus Kapitel 1 wieder auf. Wir fordern hier, dass die Randkurve sogar in C^2 liegt. Wie schon in Kapitel 1 erklärt können wir annehmen, dass das von der Kurve eingeschlossene Gebiet strikt konvex ist. Wie früher erklärt haben wir das Variations-Problem

$$F(v) := \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x \to \max$$

auf

$$V := \left\{ v \in C^2([a,b];\,\mathbb{R}) \;\middle|\; v(a) = v(b) = 0,\; G(v) := \int_a^b \sqrt{1 + (v'(x))^2}\,\mathrm{d}x = L \right\}.$$

Im folgenden nehmen wir an, dass eine Lösung des Variations-Problems existiert.

Um die Lagrange-Multiplikatoren-Regel anwenden zu können, ist

$$\delta G(u,\zeta) \neq 0$$

nachzuweisen für ein $\zeta \in C_0^\infty((a,b);\,\mathbb{R})$.

Wir benötigen das folgende

Lemma 2.1 *Es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\right) = \kappa,$$

wobei κ *die Krümmung des Graphen* $\big\{(x, u(x)) \,\big|\, x \in (a, b)\big\}$ *bezeichnet.*

Mit Lemma 2.1 folgt

$$\delta G(u, \zeta) = \int_a^b \frac{\partial p}{\partial p}(x, u(x), u'(x))\zeta'(x) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, u(x), u'(x))\zeta(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen $g(x, z, p) = g(p) = [1 + p^2]^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial g}{\partial p}(x, z, p) = \frac{p}{[1+p^2]^{\frac{1}{2}}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta G(u, \zeta) &= \int_a^b \frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\zeta'(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial z}(x, u(x), u'(x))\zeta(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b \kappa(x)\zeta(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Hier wurde beim Übergang auf die letzte Zeile partiell integriert, Lemma 2.1 verwendet, sowie ausgenutzt, dass $\zeta \in C_0^\infty((a, b); \mathbb{R})$.

Falls nun $\delta G(u, \zeta) = 0$ für alle $\zeta \in C_0^\infty((a, b); \mathbb{R})$, so folgt mit dem Fundamental-Lemma $\kappa = 0$ auf (a, b). Dies ist ein Widerspruch, da die Fläche strikt konvex sein muss.

Wegen $\delta G(u, \zeta) \neq 0$ für ein ζ kann Theorem 2.12 angewendet werden. Beachten wir

$$f(x, z, p) = p, \qquad g(x, z, p) = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}},$$

so folgt nach Gleichung (2.33), dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\Big) - 1 = 0.$$

Im besonderen ergibt sich daraus $\lambda \neq 0$ und nach Lemma 2.1 ist dies äquivalent zu

$$\kappa(x) \equiv \frac{1}{\lambda}.$$

Die rechte Seite ist eine Konstante. Wegen der strikten Konvexität der Fläche muss die Kurve ein Kreisbogen sein (d.h. die Gerade ist ausgeschlossen). □

Beweis von Lemma 2.1: Sei $\gamma(x) := (x, u(x))^t$ die Parametrisierung der Kurve. Es gilt

$$\gamma'(x) = (1, u'(x))^t$$

und der Tangenten-Einheitsvektor ist gegeben durch

$$t(x) = \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} = \frac{(1, u'(x))^t}{\sqrt{1+u'(x)^2}}.$$

Der Normalen-Einheitsvektor ist entsprechend

$$n(x) = \frac{(-u'(x), 1)^t}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}.$$

Das Paar $(t(x), n(x))$ bildet ein positiv orientiertes Orthonormal-System, denn

- $|n(x)| = |t(x)| = 1$,
- $n(x) \cdot t(x) = 0$,
- $\det \begin{pmatrix} 1 & -u'(x) \\ u'(x) & 1 \end{pmatrix} = 1 + u'(x)^2 > 0$.

Kanonischerweise parametrisiert man γ nach der *Bogenlänge*

$$s(x) := \int_a^x |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Wegen $|\gamma'(x)| > 0$ existiert $s^{-1} : [0, \mathrm{len}(\gamma)] \to [a, b]$. Setze $\Gamma := \gamma \circ s^{-1}$. Dies ist die Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge (mit $|\Gamma'(s)| = 1$).

Die *Frenet-Gleichungen* (siehe z.B. [7][S.16]) liefern

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \kappa n, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial n}{\partial s} = -\kappa t, \tag{2.38}$$

wobei

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial x}\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\Big)^{-1} \tag{2.39}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = |\gamma'(x)| = \sqrt{1 + u'(x)^2}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\kappa(x)(-u'(x), 1)^t &= \sqrt{1 + u'(x)^2}\;\kappa(x) n(x) \\
&= \sqrt{1 + u'(x)^2}\;\frac{\partial t}{\partial s}(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}, \frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}\Big)^t.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Hier wurde beim Übergang zur 2. Zeile (2.37) angewendet, die 3. Zeile ergibt sich aus (2.39). Die 2. Komponente der Vektorgleichung (2.40) liefert wie behauptet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}\right) = \kappa. \quad \square$$

Beispiel (Hängende Kette konstanter Dichte): Wir betrachten eine Kette vorgegebener Länge, die an den Endpunkten P_1 und P_2 eingespannt ist. Die Dichte der Kette sowie das Gravitationspotential seien homogen. Die Kette hängt derart, dass die potentielle Energie E_{pot} minimiert wird. Der Schwerpunkt für eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \gamma(x)$ ist gegeben durch

$$S = \frac{\int\limits_0^1 \gamma(s)\,\mathrm{d}s}{\int\limits_0^1 \mathrm{d}s} = \frac{\int\limits_a^b \gamma(x)|\gamma'(x)|\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b |\gamma'(x)|\,\mathrm{d}x},$$

wobei wir nur Fälle betrachten, in denen $\int_a^b |\gamma'(x)|\,\mathrm{d}x \neq 0$.

Hier wird die Kette durch den Graph

$$\big\{(x, v(x)) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x \in [a,b]\big\}$$

beschrieben. Der Schwerpunkt S ist daher gegeben durch den Vektor

$$S = \frac{\int\limits_a^b (x, v(x))^t \sqrt{1 + v'(x)^2}\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b \sqrt{1 + v'(x)^2}\,\mathrm{d}x}.$$

Die Kette ordnet sich so an, dass S möglichst tief liegt. Da die Länge der Kette fest ist, erhalten wir also bei Minimierung der 2. Komponente von S als Variationsproblem

$$F(v) := \int\limits_a^b v(x)\sqrt{1 + v'(x)^2}\,\mathrm{d}x \to \min$$

auf

$$V := \left\{ v \in C^1([a,b];\mathbb{R}) \;\middle|\; (a, v(a))^t = P_1,\ (b, v(b))^t = P_2,\ G(v) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + v'(x)^2}\,\mathrm{d}x = L \right\},$$

wobei wir $L > |P_1 - P_2|$ fordern, um strikte Konvexität zu erzielen bzw. um die lineare Lösung mit $\int_a^b |\gamma'(x)|\,\mathrm{d}x = 0$ auszuschließen.

Exakt wie im vorigen Beispiel gilt: Es existiert ein $\zeta \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R})$ mit $\delta G(u,\zeta) \neq 0$, also kann Theorem 2.12 angewendet werden. Es folgt, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\delta F(u,\varphi) + \lambda \delta G(u,\varphi) = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbb{R}).$$

Wir erinnern an die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung (2.33)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{\partial f}{\partial p}(\cdot,u,u') + \lambda\frac{\partial g}{\partial p}(\cdot,u,u')\Big] - \Big[\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot,u,u') + \lambda\frac{\partial g}{\partial z}(\cdot,u,u')\Big] = 0 \qquad \text{auf } [a,b].$$

In diesem Beispiel ist

$$f(x,z,p) = z\sqrt{1+p^2}, \qquad g(x,z,p) = \sqrt{1+p^2},$$

wir erhalten also

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x,z,p) &= \sqrt{1+p^2}, & \frac{\partial f}{\partial p}(x,z,p) &= \frac{zp}{\sqrt{1+p^2}},\\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,z,p) &= 0, & \frac{\partial g}{\partial p}(x,z,p) &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\end{aligned}$$

Die Gleichung (2.33) lautet also hier

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{u(x)u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}+\lambda\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\Big]-\sqrt{1+u'(x)^2}=0 \qquad \text{auf } [a,b]. \tag{2.41}$$

Sei u eine Lösung von (2.41). Dann gilt für $\tilde{u}:=u+\lambda$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{\tilde{u}(x)\tilde{u}'(x)}{\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}}\Big]-\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}=0 \qquad \text{auf } [a,b]. \tag{2.42}$$

Aus (2.42) folgt nach Lemma 2.1

$$\frac{\tilde{u}(x)\tilde{u}'(x)}{\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}}+\tilde{u}(x)\kappa(x)-\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}=0$$

und nach Multiplikation mit $\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}$

$$\kappa(x)\tilde{u}(x)\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}=1. \tag{2.43}$$

Es folgt $\kappa(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$. Also ist $\tilde{u}$ strikt konvex oder strikt konkav, damit ist auch u strikt konvex oder strikt konkav auf $[a,b]$.

Anstatt die Gleichung (2.43) direkt zu lösen, verwenden wir, dass nach Noethers Gleichung (2.27)

$$H(z,p):=p\cdot\frac{\partial f}{\partial p}(z,p)-f(z,p)\equiv c$$

gilt für eine Konstante c. Hier ist

$$H(z,p)=\frac{zp^2}{\sqrt{1+p^2}}-z\sqrt{1+p^2},$$

also

$$\frac{\tilde{u}(x)\tilde{u}'(x)^2}{\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}}-\tilde{u}(x)\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}\equiv c.$$

Multiplizieren wir mit $\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}$, so finden wir

$$-\tilde{u}(x)=c\sqrt{1+\tilde{u}'(x)^2}$$

bzw. nach Umformung

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}=\tilde{u}'(x)=\frac{1}{c}\sqrt{\tilde{u}(x)^2-c^2}.$$

Mit Separation der Variablen heißt dies

$$c\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(x)}{\sqrt{\tilde{u}(x)^2-c^2}}=\mathrm{d}\tilde{x},$$

also nach Aufintegrieren

$$c \int_a^x \frac{\mathrm{d}\tilde{u}(\tilde{x})}{\sqrt{\tilde{u}(\tilde{x})^2 - c^2}} = \int_a^x \mathrm{d}\tilde{x} = x - a.$$

Für das Integral links gilt

$$c \int_a^x \frac{\mathrm{d}\tilde{u}(x)}{\sqrt{\tilde{u}(x)^2 - c^2}} = c\Big[\operatorname{arcosh}\Big(\frac{\tilde{u}(x)}{c}\Big) - \operatorname{arcosh}\Big(\frac{\tilde{u}(a)}{c}\Big)\Big]. \tag{2.44}$$

Dabei ist

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

der Area-Cosinus-Hyperbolicus. Bei der durch (2.44) bestimmten Lösung sind die Integrationskonstanten noch durch die Randwerte zu bestimmen. □

Beispiel (Rotationssymmetrische Minimalfläche, Katenoid): Wir betrachten wie im letzten Beispiel eine Kurve $\gamma(t)$, die die Punkte P_1 und P_2 miteinander verbindet. Wir drehen γ um die x-Achse und erzeugen so eine rotationssymmetrische Fläche S. Gesucht ist die Rotationsfläche mit minimalem Flächeninhalt, d.h.

$$F(v) := 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + v'(x)^2}\, |v(x)| \,\mathrm{d}x \to \min$$

auf

$$V := \left\{ v \in C^1([a,b];\mathbb{R}) \;\middle|\; (a, v(a))^t = P_1,\ (b, v(b))^t = P_2,\ v \geq 0 \right\},$$

wobei wie früher γ der Graph von v ist.

Nach dem vorigen Beispiel ist klar, dass die optimale Lösung u eine hängende Kette beschreibt. Die durch u aufgespannte Fläche heißt *Katenoid*. Zu beachten ist, dass für zu großen Abstand $b - a$ die Lösung entartet. Die Fläche minimalen Flächeninhalts ist dann nicht mehr das Katenoid, sondern besteht aus zwei unverbundenen Kreisscheiben an den Rändern $x = a$ und $x = b$. Um dies zu verhindern benötigt man die sogenannte *Douglas-Bedingung*, die besagt, dass das Infimum über die zusammenhängende Fläche kleiner sein muss als das Infimum über die entartete Fläche. Das Minimalflächenproblem ist ausführlich in [14][S.520ff.] beschrieben. □

Beispiel (Elastischer Faden) Sei $a = -1$, $b = +1$, $k > 0$ eine Konstante (der Elastizitäts-Modul), $g > 0$ die Gravitations-Konstante (homogenes Gravitations-Feld).

Die elastische Energie des Fadens in Ruhelage ist

$$E_1(v) := k \int_{-1}^{+1} |v'(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Dies ergibt sich durch Linearisierung, da nach der Taylor-Formel

$$\sqrt{1 + u'(x)^2} - 1 = \frac{1}{2} u'(x)^2 + O(|u'|^3).$$

Die Lage-Energie des Fadens ist gegeben durch

$$E_{\text{pot}}(v) = g \int\limits_{-1}^{+1} v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für die Gesamt-Energie haben wir demnach

$$F(v) := E_1(v) + E_{\text{pot}}(v) \to \min$$

auf

$$V := \big\{ v \in C^1([-1,+1];\,\mathbb{R}) \;\big|\; v(-1) = v(1) = 0 \big\}.$$

Wir nehmen an, dass ein Minimierer $u \in C^2([-1,+1])$ von F in V existiert.

Zur Berechnung der Euler-Lagrange-Gleichung bemerken wir

$$f(x,z,p) = kp^2 + gz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,z,p) = g, \quad \frac{\partial f}{\partial p}(x,z,p) = 2kp$$

und erhalten

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(2ku'(x)\big) + g = 0,$$

also

$$-2ku''(x) + g = 0.$$

Zweimaliges Aufintegrieren liefert

$$-2ku(x) = -\frac{1}{2}gx^2 + c_1 x + c_2$$

für geeignete Konstanten c_1, c_2, die durch die Randwerte festgelegt sind:

$$\begin{aligned} 0 &= -2ku(-1) &&= -\frac{g}{2} - c_1 + c_2, \\ 0 &= -2ku(+1) &&= -\frac{g}{2} + c_1 + c_2, \end{aligned}$$

was auf $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{g}{2}$ führt.

Einsetzen liefert das Endergebnis

$$u(x) = \frac{g}{4k}\big(x^2 - 1\big). \quad \square$$

Beispiel (Elastischer Balken): Wir betrachten einen Balken, der an den Randpunkten $a = -1$, $b = +1$ eingespannt sei. Die zugrunde liegenden physikalischen Annahmen sind

- Der Balken ist elastisch.
- Der Balken ist homogen.
- Das Schwerefeld g ist homogen.

Sei $K > 0$ eine Konstante (der *Bulk-Modulus* des Balkens). In 1. Näherung wird die elastische Energie des Balkens beschrieben durch

$$E_2(v) := K \int_{-1}^{+1} |v''(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Diesen Ansatz ergibt eine Linearisierung, da

$$\kappa(x) = \Big(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \Big)' = \frac{u''(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \sim u''(x)$$

für $|u'(x)|$ klein genug.

Analog oben führt dies auf

$$F(v) := E_{\text{pot}}(v) + E_2(v) = \int_{-1}^{+1} \big(K|v''(x)|^2 + gv(x) \big) \, \mathrm{d}x \to \min$$

auf dem Raum

$$V := \big\{ v \in C^4([-1,+1]\ \mathbb{R}) \ \big| \ v(-1) = v(+1) = 0, v'(-1) = v'(+1) = 0 \big\}.$$

Wir nehmen an, dass ein Minimierer $u \in C^4([-1,+1]; \mathbb{R})$ existiert. In diesem Fall gilt für den Integrand $f = f(x, z, p, s)$ mit der Variable $s = v''(x)$. Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung lautet dann (vgl. Aufgabe 2):

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, u, u', u'') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial f}{\partial p}(x, u, u', u'') + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \frac{\partial f}{\partial s}(x, u, u', u'') = 0 \qquad \text{in } [a, b].$$

Für das Beispiel heißt dies konkret

$$g + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \big(2Ku''(x) \big) = g + 2Ku''''(x) = 0 \qquad \text{für } x \in [a, b]. \tag{2.45}$$

Integrieren wir (2.45) viermal auf, so folgt

$$2Ku(x) = -\frac{g}{24} x^4 + \frac{c_1}{6} x^3 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_3 x + c_4$$

mit geeigneten reellen Konstanten $c_1, \ldots, c_4$, die aus den Randwerten bestimmt werden müssen:

$$\begin{aligned}
0 &= 2Ku(-1) &= -\frac{g}{24} - \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{2} - c_3 + c_4, \\
0 &= 2Ku(+1) &= -\frac{g}{24} + \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{2} + c_3 + c_4, \\
0 &= 2Ku'(-1) &= +\frac{g}{6} + \frac{c_1}{2} - c_2 + c_3, \\
0 &= 2Ku'(+1) &= -\frac{g}{6} + \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3.
\end{aligned}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhalten wir

$$c_1 = c_3 = 0, \quad c_2 = \frac{g}{6}, \quad c_4 = -\frac{g}{24}.$$

Einsetzen liefert

$$u(x) = -\frac{g}{48K} \big(x^2 - 1 \big)^2. \quad \square$$

Kapitel 3

Sobolev-Funktionen

3.1 Motivation

Bislang haben wir immer $u \in C^k(\Omega)$ angenommen (eventuell mit dazugehörigen Randwerten). Vielfach haben wir in den Beispielen und den Rechnungen von Kapitel 2 die Existenz klassischer Lösungen ohne Begründung (mit teilweise starken Regularitätsannahmen) vorausgesetzt. Mit der in der Einleitung skizzierten direkten Methode der Variationsrechnung ergeben sich bei klassischen Lösungen jedoch Probleme (z.B. die Nicht-Konvergenz von Minimalfolgen). Dazu betrachten wir das folgende

Beispiel (Dirichlet-Funktional): Das Dirichlet-Funktional ist gegeben durch (d.h. $M = 1$)

$$D(v) := \frac{1}{2} \int_a^b |v'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Wir betrachten das Minimierungs-Problem

$$D(v) \to \min \qquad \text{für } v \in V := \{v \in C^1([a,b]; \mathbb{R}) \mid v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$$

zu vorgegebenen reellen Konstanten α, β.

Wegen $D(v) \not\equiv -\infty$ und $V \neq \emptyset$ existiert eine *Minimal-Folge* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit

$$D(u_n) \to D(u) := \inf_{v \in V} D(v). \tag{3.1}$$

Für die Anwendbarkeit der direkten Methode für das Beispiel sind i.b. die folgenden zwei Punkte zu klären.

- Gibt es eine Folge $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ mit $u_{n_j} \to u$ für eine Funktion $u \in V$? (Folgen-Kompaktheit). Beachte

  $$D(u_{n_j}) \leq 2 \inf_{v \in V} D(v) + 1 \leq C < \infty$$

  nach (3.1) für alle $j \geq j_0$, also die Beschränktheit in der Ableitungs-Semi-Norm.

- Gilt $D(u) = \lim_{j\to\infty} D(u_{n_j})$ oder wenigstens

  $$D(u) \leq \liminf_{j\to\infty} D(u_{n_j}) \text{ ?}$$

Problem hierbei: Die Bedingung $D(u_n) \le C < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ garantiert nicht die Existenz einer Teilfolge $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $D(u_{n_j}) \to u$ in $C^1([a,b])$ für $j \to \infty$.

Wesentliche Beobachtung: Eine gröbere Topologie im Raum V kann das obige Problem lösen, allerdings zu dem Preis, dass vom Limes u die Randwerte α, β nicht angenommen werden. Die Topologie sollte so gewählt werden, dass die Unterhalbstetigkeit von D immer noch gilt genauso wie die Kompaktheit der Minimalfolge. In vielen Fällen liefert die Theorie der Sobolev-Funktionen eine zufriedenstellende Lösung.

3.2 Sobolev-Räume, schwache Ableitung

Als Motivation betrachten wir die partielle Differentialgleichung $-\triangle u = f$ in Ω für eine gegebene Funktion $f \in L^1(\Omega)$ und ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Für die klassische Lösbarkeit benötigt man $u \in C^2(\Omega)$. Multiplizieren wir jedoch die Gleichung mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und integrieren partiell, so folgt

$$\int_\Omega (\nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) - f(x)\varphi)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.2}$$

Falls $u \in C^2(\Omega)$, so können wir (3.2) partiell zurückintegrieren und erhalten

$$-\int_\Omega (\triangle u(x) - f(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nach dem Fundamental-Lemma der Variationsrechnung folgt daraus die ursprüngliche Differentialgleichung. Gleichung (3.2) heißt auch *schwache Formulierung* der Differentialgleichung $-\triangle u = f$. Für (3.2) wird nur $\nabla u \in L^1(\Omega)$ benötigt. $\square$

Definition: Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein *Multi-Index*, d.h. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Wir definieren

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} u.$$

Wir setzen noch $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$.

Die Funktion $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ besitzt eine *schwache Ableitung* $u^{(\alpha)}$, falls

$$\int_\Omega u(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u^{(\alpha)}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.3}$$

Man schreibt üblicherweise $\partial^\alpha u := u^{(\alpha)}$.

Definition (Sobolev-Räume): Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p \le \infty$. Wir definieren den *Sobolev-Raum* der m-mal schwach-differenzierbaren Funktionen in $L^p(\Omega)$ durch

$$H^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \le m\} \tag{3.4}$$

mit der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Statt $H^{m,p}(\Omega)$ ist auch die Notation $W^{m,p}(\Omega)$ üblich.

Man setzt noch $H^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$ und $H^m(\Omega) := H^{m,2}(\Omega)$.

Bei der Definition (3.4) in Verbindung mit (3.3) werden also Ableitungen bis zur maximalen Ordnung m auf die Testfunktion φ gewälzt. Dies ist eine stärkere Bedingung als bei der distributionellen Ableitung, bei der Ableitungen beliebiger Ordnung auf die Testfunktion geworfen werden dürfen.

Beispiel (Schwache Ableitung von $u(x) = |x|$): Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$. Die Funktion u ist stetig in $\mathbb{R}$ und mit Ausnahme von $x = 0$ überall im klassischen Sinne differenzierbar.

Wir bestimmen nun die schwache Ableitung $u'(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned} -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'\varphi \,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\varphi' \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} u\varphi' \,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+\infty} u\varphi' \,\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_{-\infty}^{0} x\varphi'(x) \,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+\infty} x\varphi'(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Wir integrieren die rechte Seite partiell. Wegen $u(0) = 0$ und $\varphi(-\infty) = \varphi(\infty) = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'\varphi \,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(x) \,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x) \,\mathrm{d}x - \big[u\varphi\big]_{-\infty}^{0} + \big[u\varphi\big]_{0}^{\infty} \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(x) \,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nach dem Fundamental-Lemma der Variationsrechnung folgt daraus $u'(x) = \operatorname{sgn}(x)$. $\square$

Theorem 3.1 *Fur $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist $(H^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{H^{m,p}})$ ein Banachraum, d.h. ein vollständiger, normierter Vektorraum. Für $p = 2$ ist $H^{m,p}(\Omega)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$(u, v)_{H^{m,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \cdot \partial^\alpha v(x) \,\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Beweis: Die Banachraum-Eigenschaft folgt aus der Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$, siehe Satz 1.10, für alle $1 \leq p \leq \infty$.

Genauer: Wir betrachten der Einfachheit halber nur den Fall $\Omega \subset \mathbb{R}$. Dann ist für die isometrische, lineare Abbildung

$$\begin{aligned} J : H^{m,p}(\Omega) &\to (L^p(\Omega))^m, \\ u &\mapsto (u^\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \end{aligned}$$

die Menge

$$J(H^{m,p}(\Omega)) = \left\{ u^\alpha \in (L^p(\Omega))^m \;\middle|\; \int\limits_\Omega u \partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x, \quad |\alpha| \leq m \right\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $(L^p(\Omega))^m$, denn:

Für jede Folge $u_j^\alpha \in L^p(\Omega)$ mit $|\alpha| \leq m$ und $u_j^\alpha \to u^\alpha$ in $L^p(\Omega)$ gilt

$$\int\limits_\Omega u_j \partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_j^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \tag{3.6}$$

und die linke Seite von (3.6) konvergiert für $j \to \infty$ gegen $\int_\Omega u \partial^\alpha u \,\mathrm{d}x$, die rechte gegen $\int_\Omega u^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x$. Also ist $H^{m,p}(\Omega)$ isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $(L^p(\Omega))^m$.

Dass (3.5) ein Skalarprodukt definiert, prüft man elementar nach. □

Definition: Wir definieren $H_0^{m,p}(\Omega)$ als den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^{m,p}(\Omega)$. Funktionen in $H_0^{m,p}(\Omega)$ haben den Randwert 0 im schwachen Sinn.

Definition (Dualraum von $H_0^{m,p}(\Omega)$): Sei $1/p + 1/q = 1$. Wir definieren den *Dualraum* von $H_0^{m,p}(\Omega)$ durch

$$H^{-m,q}(\Omega) := (H_0^{m,p}(\Omega))'$$

mit der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^{-m,q}(\Omega)} := \sup_{\varphi \in H_0^{m,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle \varphi, u \rangle}{\|\varphi\|_{H^{m,p}(\Omega)}}$$

für $u \in H^{-m,p}(\Omega)$. Dabei bezeichnet $\langle \varphi, u \rangle := u(\varphi)$ das Dualitätspaar.

Beispiel: Wir definieren das lineare Funktional $F : H_0^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$v \mapsto F(v) := \int\limits_\Omega \partial^\alpha v(x) g(x) \,\mathrm{d}x \qquad \text{mit } |\alpha| \leq m, g \in L^q(\Omega).$$

Das Funktional F ist stetig, denn

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \int\limits_\Omega \partial^\alpha v(x) g(x) \,\mathrm{d}x \right| \leq \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{H^{m,p}(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \end{aligned}$$

3.3 Wichtige Eigenschaften von Sobolev-Funktionen

Wir tragen nachfolgend einige wichtige Aussagen über Sobolev-Funktionen zusammen.

Theorem 3.2 (Dichte Teilmengen in $H^{m,p}(\Omega)$) *Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in H^{m,p}(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $f_j \in H^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit*

$$\|f - f_j\|_{H^{m,p}(\Omega)} \to 0 \qquad \text{für } j \to \infty. \tag{3.7}$$

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt und $f \in H_0^{m,p}(\Omega)$, so gilt (3.7) für $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$.

Beweis: Siehe z.B. [2], Satz 1.10.

Theorem 3.3 (Produkt-, Kettenregel) *In Analogie zur klassischen Produkt- und Kettenregel gelten die folgenden Aussagen für Sobolev-Funktionen.*

(1) Sei $u \in H^{m,p}(\Omega)$, $v \in H^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq p,q,r \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1/r$. Dann gilt $(uv) \in H^{1,r}(\Omega)$ mit

$$\nabla(uv) = (\nabla u)v + u(\nabla v).$$

(2) Sei $u \in H^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in C^{0,1}(\mathbb{R})$. Dann gilt $(f \circ u) \in H^{m,p}(\Omega)$ mit

$$\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u \qquad \textit{fast überall in } \Omega.$$

(Beachte: Nach dem Satz von Rademacher, siehe z.B. [19], existiert für $f \in C^{0,1}(\mathbb{R})$ die Ableitung $f'(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$.)

(3) Seien Ω_1, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ offen und $\tau : \Omega_1 \to \Omega_2$ ein C^1-Diffeomorphismus, d.h. τ ist bijektiv und $\tau \in C^1(\Omega_1)$, $\tau^{-1} \in C^1(\Omega_2)$ mit $D\tau$, $D\tau^{-1}$ beschränkt. Für $f \in H^{1,p}(\Omega_2)$ ist dann $(f \circ \tau) \in H^{1,p}(\Omega_2)$ und

$$\nabla(f \circ \tau) = [(\nabla f) \circ \tau]D\tau \qquad \textit{fast überall in } \Omega_1.$$

Beweis: Der Beweis von (2) kann analog zu (1) geführt werden. Der Beweis von (3) findet sich in [2], Lemma 2.15(2).

(1) Wir führen den Beweis für $1 \leq p,q < \infty$. Nach Satz 3.2 existieren u_n, $v_n \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$, $v_n \to v$ in $H^{1,q}(\Omega)$. Wegen u_n, $v_n \in C^\infty(\Omega)$ gilt

$$\nabla(u_n v_n) = (\nabla u_n)v_n + u_n(\nabla v_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $u_n v \to uv$ in $L^r(\Omega)$, da nach der Hölder-Ungleichung wegen $r/p + r/q = r$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n v - uv|^r \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |u_n - u|^r |v|^r \,\mathrm{d}x \\
&\leq \Big(\int_\Omega |u_n - u|^{r\frac{p}{r}} \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{r}{p}} \Big(\int_\Omega |v|^{r\frac{q}{r}} \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{r}{q}} \\
&= \|u_n - u\|^r_{L^p(\Omega)} \|v\|^r_{L^q(\Omega)} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Es ist $u_n v \in L^r(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n v|^r \,\mathrm{d}x &\leq \Big(\int_\Omega |u_n|^{r\frac{p}{r}} \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{r}{p}} \Big(\int_\Omega |v|^{r\frac{q}{r}} \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{r}{q}} \\
&\leq \|u_n\|^r_{L^p(\Omega)} \|v\|^r_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}$$

und $\nabla(u_n v) \in L^r(\Omega)$, denn

$$\int_\Omega (u_n v_m)\partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Big[(\partial^\alpha u_n)v_m + u_n(\partial^\alpha v_m)\Big]\varphi \,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

und somit für $m \to \infty$

$$\int_\Omega (u_n v)\partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Big[(\partial^\alpha u_n)v + u_n(\partial^\alpha v)\Big]\varphi \,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (3.8)$$

also $\partial^\alpha(u_n v) = (\partial^\alpha u_n)v + u_n(\partial^\alpha v) \in L^r(\Omega)$. Dass die rechte Seite in $L^r(\Omega)$ liegt, folgt wie oben mit der Hölder-Ungleichung.

Es folgt $u_n v \to uv$ in $H^{1,r}(\Omega)$ für $n \to \infty$. Mit (3.8) und für $n \to \infty$ ergibt sich

$$\int\limits_\Omega (uv)\partial^\alpha v \,\mathrm{d}x = -\int\limits_\Omega \Big[(\partial^\alpha u)v + u\partial^\alpha v\Big]\varphi \,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad \square$$

Theorem 3.4 (Poincaré-Ungleichung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt, $1 \le p < \infty$. Dann existiert eine Konstante $C = C(N,p,\Omega)$, so dass*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \textit{für alle } u \in H_0^{1,p}(\Omega).$$

Beweis: (1) Sei zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir schreiben $x = (x_1, \overline{x})$ und setzen u zu einer glatten Funktion in $\mathbb{R}^N$ fort vermöge $u := 0$ auf $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Wie in Aufgabe 7 gezeigt gilt dann

$$\int\limits_{-R}^{+R} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x)|^p \,\mathrm{d}\overline{x}\,\mathrm{d}x_1 \le (2R)^p \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

(2) Sei nun $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ allgemein gewählt. Dann existiert nach Satz 3.2 eine Folge $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$. Mit Teil (1) des Beweises gilt daher

$$\|u\|_{L^p} \le \|u - u_n\|_{L^p} + \|u_n\|_{L^p} \le \|u - u_n\|_{L^p} + C\|\nabla u_n\|_{L^p}.$$

Die rechte Seite konvergiert für $n \to \infty$ gegen $C\|\nabla u\|_{L^p}$. $\square$

Bemerkung: Wie der Beweis zeigt, gilt Satz 3.4 auch, wenn Ω nur in einer Richtung (hier x_1) beschränkt ist.

Theorem 3.5 (Poincaré-Ungleichung mit Mittelwert 0) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, beschränkt und konvex, $1 \le p < \infty$. Dann existiert eine Konstante $C = C(N,p,\Omega)$, so dass*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \textit{für alle } u \in H^{1,p}(\Omega) \textit{ mit } \int\limits_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0.$$

Zum Beweis von Satz 3.5 benötigen wir das folgende

Lemma 3.1 *Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $g(x) := \int\limits_\Omega |x-y|^{1-N} f(y)\,\mathrm{d}y$. Dann gilt für eine nicht-negative Konstante c*

$$\|g\|_{L^p(\Omega)} \le c\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis: Die Aussage des Lemmas ist mit der Hölder-Ungleichung sofort klar für $N = 1$. Daher nehmen wir im folgenden $N \geq 2$ an.

Für geeignetes $\delta \geq 0$ gilt

$$\|g\|_{L^p}^p = \int\limits_\Omega \Big| \int\limits_\Omega \Big[|x-y|^{(1-N)\delta} f(y) \Big] \Big[|x-y|^{(1-N)(1-\delta)} \Big] \,\mathrm{d}y \Big|^p \,\mathrm{d}x.$$

Wir verwenden für den ersten Term $[\ldots]$ in obigem Ausdruck die Hölder-Ungleichung mit Exponent p, für den 2. Term $[\ldots]$ die Hölder-Ungleichung mit Exponent q. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^p}^p &\leq \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega \Big[|x-y|^{(1-N)\delta p} |f(y)|^p \,\mathrm{d}y \Big) \Big(\int\limits_\Omega |x-y|^{(1-N)\delta q} \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{p}{q}} \,\mathrm{d}x \\
&\leq \sup_{x \in \Omega} \Big(\int\limits_\Omega |x-y|^{(1-N)\delta q} \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{p}{q}} \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega |x-y|^{(1-N)\delta p} \,\mathrm{d}x |f(y)|^p \Big) \,\mathrm{d}y \\
&\leq \underbrace{\sup_{x \in \Omega} \Big(\int\limits_\Omega |x-y|^{(1-N)\delta q} \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{p}{q}}}_{=:I_1} \underbrace{\sup_{y \in \Omega} \int\limits_\Omega |x-y|^{(1-N)\delta p} \,\mathrm{d}x \int\limits_\Omega |f(y)|^p \,\mathrm{d}y}_{=:I_2}.
\end{aligned}$$

Es ist nun zu klären, für welche $\delta > 0$ die obigen Ausdrücke existieren und beschränkt sind, so dass wir das Supremum herausziehen können.

Zum Integral I_1 bemerken wir (wobei $d := \operatorname{diam}(\Omega) < \infty$)

$$\int\limits_\Omega |x-y|^{(1-N)(1-\delta)q} \,\mathrm{d}y \leq \int\limits_{B_d(x)} |x-y|^{(1-N)(1-\delta)q} \,\mathrm{d}y.$$

Wir führen Polarkoordinaten ein. Dazu setzen wir $y = x + r\xi$ mit $\xi \in \partial B_1(0)$ und $r \in [0, d]$. Wir erhalten

$$\int\limits_\Omega |x-y|^{(1-N)(1-\delta)q} \,\mathrm{d}y \leq \int\limits_0^d \int\limits_{\partial B_1(0)} |r|^{(1-N)(1-\delta)q+N-1} \,\mathrm{d}r.$$

Der Ausdruck rechts ist wegen $N \geq 2$ endlich, falls $(1-N)(1-\delta)q + N - 1 > -1$, d.h. falls

$$\delta > \frac{N-p}{(N-1)p}.$$

Zur Abschätzung des 2. Integrals bemerken wir, dass

$$\int\limits_\Omega |x-y|^{(1-N)\delta p} \,\mathrm{d}x < \infty,$$

falls $(1-N)\delta p + N - 1 > -1$, d.h. genau dann, wenn

$$\delta < \frac{N}{(N-1)p}.$$

Wir wählen also

$$\frac{N-p}{(N-1)p} < \delta < \frac{N}{(N-1)p}.$$

Da dies immer möglich ist, ist das Lemma bewiesen. $\square$

Beweis von Satz 3.5:

Sei $u \in C^\infty(\Omega) \cap H^{1,p}(\Omega)$ und wie früher $⨍_\Omega u \, \mathrm{d}y = 0$. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$u(x) - u(y) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(y + t(x-y)) \, \mathrm{d}t = \int_0^{|x-y|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u\Big(y + t\frac{x-y}{|x-y|}\Big) \, \mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

Nachfolgend schreiben wir $\xi := \frac{x-y}{|x-y|} \in \partial B_1(0)$. Dann gilt

$$-|\Omega| u(y) = \int_\Omega \big(u(x) - u(y)\big) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \int_0^{|x-y|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(y + t\xi) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x,$$

wobei wir für die 2. Identität (3.9) verwendet haben. Es folgt mit $v := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u$ und $d = \mathrm{diam}(\Omega) < \infty$

$$\begin{aligned} |u(y)| &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_0^{|x-y|} |v(y + t\xi) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{B_d(y)} \int_0^\infty |v(y + t\xi)| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mit $\mathbb{S}^{N-1}$ bezeichnen wir die *Eins-Sphäre* im $\mathbb{R}^N$. Nach Transformation auf Polarkoordinaten ergibt dies

$$\begin{aligned} |u(y)| &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_0^\infty \int_0^d \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |v(y + t\xi) r^{N-1} \mathrm{d}O(\xi) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{|\Omega|} \frac{d^N}{N} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |v(y + t\xi)| r^{N-1} \mathrm{d}O(\xi) \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Nach Substitution mit $z := y + t\xi$ schreibt sich dies als

$$|u(y)| \leq C(\Omega; N) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(z)|}{|y-z|^{N-1}} \, \mathrm{d}z$$

und nach Integration über Ω

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq C \int_\Omega \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(z)|}{|y-z|^{N-1}} \, \mathrm{d}z \Big)^p \mathrm{d}y \\ &\leq c \|v\|_{L^p(\Omega)}^p \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Hier wurde Lemma 3.1 verwendet mit $|g| := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(z)|}{|y-z|^{N-1}}\,\mathrm{d}z$.

(2) Sei nun $u \in H^{1,p}(\Omega)$ allgemein mit $\int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Dann existiert nach Theorem 3.2 eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap H^{1,p}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$ für $n \to \infty$. Es gilt punktweise

$$u_n - \int_\Omega u_n\,\mathrm{d}y \to u - \int_\Omega u\,\mathrm{d}y = u. \quad \square$$

Bemerkung: Es wurde auch gezeigt:

$$\left| \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{|\Omega|} u(y) \right| \leq C \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,\mathrm{d}y. \tag{3.10}$$

Theorem 3.6 (Randwerte von Funktionen in $H^{1,p}(\Omega)$) *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $B : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ mit*

(1) $\|Bu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}$,

(2) Für $u \in H^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gilt $Bu = u_{|\partial\Omega}$.

Beweis: Wir betrachten eine sogenannte *Partition der Eins* von Ω. Dazu sei $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung, d.h. $\Omega \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ mit $U_j \subset \mathbb{R}^n$ offen für alle j. Wir fordern ferner, dass $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *lokal-finit* ist, d.h. für alle $x \in \Omega$ existiere ein $\overline{B_\varepsilon(x)}$, so dass $\{j \in \mathbb{N} \mid \overline{U_j \cap B_\varepsilon(x)} \neq \emptyset\}$ endlich ist. Die bereits genannte Partition der Eins von Ω ist nun eine Familie von Funktionen $\eta_j \in C_0^\infty(U_j)$ mit $\eta_j \geq 0$ und $\sum_{j\in\mathbb{N}} \eta_j = 1$ (bei dieser Summe sind lokal immer nur endlich viele Summanden verschieden von 0).

Wegen $\partial\Omega \in C^{0,1}$ lässt sich jede nicht-leere Menge $\partial\Omega \cap U_{j_0}$ schreiben als Graph einer Lipschitz-Funktion.

Nach Geradebiegen des Randes (=Anwendung eines Diffeomorphismus) können wir uns o.E. beschränken auf den Fall, dass $x = (\overline{x}, x_N) \in \mathbb{R}^N$ und

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0 \right\} \cap B_1(0), \quad u \in H^{1,p}(\Omega), \quad \operatorname{supp} u \subset B_1(0).$$

Sei $0 < s < t$. Ohne Einschränkung gelte $u \in H^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Mit der Hölder-Ungleichung für Exponenten p, q und $1/p + 1/q = 1$ gilt

$$\begin{aligned} |u(\overline{x}, t) - u(\overline{x}, s)|^p &= \left| \int_s^t \partial_N u(\overline{x}, \tau)\,\mathrm{d}\tau \right|^p \\ &\leq |t-s|^{\frac{1}{q}} \int_s^t |\partial_N u(\overline{x}, \tau)|^p\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Wir setzen u außerhalb Ω durch 0 fort. Dann ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(\overline{x},t)-u(\overline{x},s)|^p \,\mathrm{d}\overline{x} &\leq |t-s|^{\frac{1}{q}} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \int\limits_s^t |\partial_N u(\overline{x},\tau)|^p \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}\overline{x} \\ &\leq |t-s|^{\frac{1}{q}} \|u\|^p_{H^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Mit $v_t(\cdot) := u(\cdot,t)$ heißt dies

$$\|v_t - v_s\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq |t-s|^{\frac{1}{pq}} \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.11}$$

Nach Ungleichung (3.11) ist $(v_t)_{t\geq 0}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\partial\Omega)$. Daher existiert

$$Bu := \lim_{t\searrow 0} v_t \in L^p(\partial\Omega).$$

Es gilt

$$\|v_t - Bu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq |t|^{\frac{1}{pq}} \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}.$$

Wählen wir t groß, so erhalten wir

$$\|Bu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}. \quad \square$$

3.4 Schwache Konvergenz

Definition: Sei X ein Banachraum über einem Körper $\mathbb{K}$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), X' der *Dualraum* von X, d.h. der Raum der stetigen, linearen Abbildungen von X nach $\mathbb{K}$.

1. Für $x \in X$, $x' \in X'$ definieren wir das *Dualitätspaar* $\langle x, x'\rangle := x'(x) \in \mathbb{K}$.
2. $x_n \rightharpoonup x$ in X (x_n *konvergiert schwach* gegen x in X), falls für alle $x' \in X'$ gilt $\langle x_n, x'\rangle \to \langle x, x'\rangle$ in $\mathbb{K}$ für $n \to \infty$.
3. $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ in X' ('x_n *konvergiert schwach-** gegen x' in X'), falls für alle $x' \in X'$ gilt $\langle x, x'_n\rangle \to \langle x, x'\rangle$ in $\mathbb{K}$ für $n \to \infty$.
4. $A \subset X$ ist *schwach folgenkompakt*, falls jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt mit schwachem Limes in A.

Bemerkung:

- Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.
- Man kann mit dem Satz von Banach-Steinhaus zeigen, dass schwach*-konvergente Folgen beschränkt sind.
- Der schwache / schwach-*- Limes sind eindeutig.
- Normkonvergenz impliziert schwache Konvergenz.

Beispiel: Sei $f_n(x) := \sin(nx)$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(\mathbb{R})$.

Beweis: $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ genau dann, wenn für $n \to \infty$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in L^2(\mathbb{R}).$$

Da die Treppenfunktionen dicht liegen in $L^p(\mathbb{R})$ für $1 \leq p < \infty$, genügt es zu zeigen, dass

$$\int\limits_a^b \sin(nx)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

wobei $-\infty < a < b < +\infty$. Nach Substitution von $y := nx$, d.h. $\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,\mathrm{d}y$ ist also zu zeigen, dass

$$\frac{1}{n}\int\limits_{na}^{nb} \sin(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\cos(na) - \cos(nb)}{n} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Die letzte Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Beschränktheit von $\cos(\cdot)$, denn

$$\left|\frac{\cos(na) - \cos(nb)}{n}\right| \leq \frac{2}{n}. \quad \square$$

Bemerkung: Aus $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ und $g_n \overset{*}{\rightharpoonup} g$ in X für $n \to \infty$ folgt i.a. nicht $f_n g_n \overset{*}{\rightharpoonup} fg$. Dazu das

Beispiel: Sei $A := \cup_{j=0}^{\infty}[\frac{2j}{n}, \frac{2j+1}{n}) \cap (0,1)$ und $f_n(x) := \mathcal{X}_A$ die charakteristische Funktion von A. Setze $g_n(x) := 1 - f_n(x)$. Dann gilt

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{2}, \quad g_n \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{2} \qquad \text{in } L^2((0,1)),$$

aber

$$f_n g_n(x) = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Definition: Eine Menge X heißt *separabel*, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge von X gibt.

Als Beispiele sind $L^p(\Omega)$ und $H^{k,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ und $k \geq 0$ separabel.

Theorem 3.7 (Schwach*-Folgenkompaktheit) *Sei $R > 0$ und X ein separabler Banachraum. Dann ist $\overline{B_R(0)} \subset X'$ schwach*-folgenkompakt.*

Beweis: Sei $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X, $x'_k \in X'$ mit $\|x'_k\| \leq 1$. Es folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(\langle x_n, x'_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist in $\mathbb{K}$, da

$$|\langle x_n, x'_k\rangle| \leq \|x_n\|\,\|x'_k\| \leq \|x_n\|.$$

Nach dem Cantorschen Diagonal-Verfahren und der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ existiert also eine Teilfolge $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so dass für alle n die Folge $(\langle x_n, x'_{k_i}\rangle)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $i \to \infty$. Damit konvergiert $(\langle x, x'_{k_i}\rangle)_i$ in $\mathbb{K}$ für $i \to \infty$ und alle $x \in Y := \operatorname{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Wir definieren die lineare Abbildung $x' : Y \to \mathbb{K}$ durch

$$\langle y, x'\rangle := \lim_{i\to\infty} \langle y, x'_{k_i}\rangle.$$

Die Abbildung x' ist stetig, denn

$$|\langle y, x'\rangle| \leftarrow |\langle y, x'_{k_i}\rangle| \le \|y\|\|x_{k_i}\| \le \|y\|,$$

also gilt $x' \in Y'$ mit $\|x'\|_{Y'} \le 1$. Da x' gleichmäßig stetig (Lipschitz-stetig) auf Y ist, besitzt x' eine endliche Fortsetzung auf $\overline{Y} = X$, daher ist $x' \in X$.

Für alle $x \in X$ erhalten wir

$$|\langle x, x'\rangle - \langle x, x_{k_i}\rangle| \le |\langle y, x'\rangle - \langle y, x'_{k_i}\rangle| + 2\|x - y\|.$$

Der 1. Ausdruck auf der rechten Seite konvergiert gegen 0 für $i \to \infty$ und festes y. Der 2. Ausdruck kann aufgrund der Dichtheit von Y bei geeigneter Wahl von $y \in Y$ beliebig klein gemacht werden.

Daher gilt $x'_{k_i} \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ in X. $\square$

Theorem 3.8 (Schwache Folgenkompaktheit) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt, $1 < p < \infty$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{1,p}(\Omega)$ mit*

$$\|u_n\|_{H^{m,p}(\Omega)} \le R \qquad \textit{gleichmäßig in } n$$

für eine Konstante $R > 0$. Dann existiert eine Teilfolge (wieder u_n genannt) und ein $u \in H^{m,p}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u_n \partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \qquad \forall |\alpha| \le m,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(Nach Definition 3.4 heißt dies $u_n \rightharpoonup u$ in $H^{m,p}(\Omega)$.)

Allgemeine Fassung (Satz von Banach-Alaoglu): *Sei X reflexiver Banachraum. Dann ist $\overline{B_R(0)} \subset X$ schwach-folgenkompakt.*

Beweis: Wir führen den Beweis nur für $p = 2$, d.h. im Hilbertraum-Fall, wo eine Basis existiert. Sei $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormal-Basis von $L^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\partial^\alpha u_n = \sum_{j\in\mathbb{N}} a^\alpha_{j,n} e_j$$

mit $a^\alpha_{j,n} := (\partial^\alpha u_n, e_j)_{L^2(\Omega)}$. Die $a^\alpha_{j,n}$ sind beschränkt, denn nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$|a^\alpha_{j,n}| = |(\partial^\alpha u_n, e_j)_{L^2}| \le \|\partial^\alpha u_n\|_{L^2} \|e_j\|_{L2} \le R.$$

Daher existiert nach dem Cantorschen Diagonal-Verfahren für alle Paare $(\alpha, j) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{N}$ eine konvergente Teilfolge $a_{j,n}^\alpha \to a_j^\alpha$ für $n \to \infty$. Sei $u^\alpha := \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j^\alpha e_j$. Dann gilt

$$u^\alpha \in B_R(0) \subset L^2(\Omega), \tag{3.12}$$

denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt für $n \to \infty$

$$\sum_{j=1}^k |a_j^\alpha|^2 \leftarrow \sum_{j=1}^k |a_{j,n}^\alpha|^2 \leq \|\partial^\alpha u_n\|_{L^2}^2 \leq \|u_n\|_{H^{m,2}}^2 \leq R^2.$$

Der Grenzübergang $k \to \infty$ liefert (3.12). Wegen

$$(\partial^\alpha u_n, e_j) = a_{j,n}^\alpha \to a_j^\alpha = (u^\alpha, e_j)_{L^2} \qquad \text{für } n \to \infty$$

gilt für alle $\varphi \in L^2(\Omega)$ für $n \to \infty$

$$(\partial^\alpha u_n, \varphi)_{L^2} \to (u^\alpha, \varphi),$$

denn sei $\varphi = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j e_j$, $\tilde{\varphi}_l := \sum_{j=1}^l \varphi_j e_j$. Dann haben wir für $l \to \infty$

$$(\partial^\alpha u_n, \varphi)_{L^2} = \underbrace{(\partial^\alpha u_n, \tilde{\varphi}_l)_{L^2}}_{\to (\partial^\alpha u_n, \varphi)_{L^2}} + \underbrace{(\partial^\alpha u_n, \varphi - \tilde{\varphi}_l)_{L^2}}_{\leq \|\partial^\alpha u_n\|_{L^2} \|\varphi - \tilde{\varphi}_l\|_{L^2} \to 0}.$$

Somit also

$$(\partial^\alpha u_n, \varphi)_{L^2} \to (u^\alpha, \varphi)_{L^2} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $u^\alpha = \partial^\alpha u^0$ gilt. Dies folgt aus

$$(u^\alpha, \varphi)_{L^2} \leftarrow (\partial^\alpha u_n, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(u_n, \partial^\alpha \varphi) \to (-1)^{|\alpha|}(u_0, \partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha u_0, \varphi). \quad \square$$

3.5 Einbettungssätze

In bestimmten Fällen besitzen Sobolev-Funktionen einen stetigen oder sogar klassisch differenzierbaren Repräsentanten. Der genaue Zusammenhang wird in Einbettungssätzen formalisiert. Mit Hilfe dieser Sätze kann die Theorie der Sobolev-Funktionen z.B. angewendet werden in der Existenztheorie partieller Differentialgleichungen zum Nachweis klassisch-differenzierbarer Lösungen.

Theorem 3.9 (Einbettungssatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Dann sind für $N \geq 2$ die folgenden Einbettungen stetig:*

$$H_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega), & p < N, \\ C^0(\overline{\Omega}), & p > N. \end{cases} \tag{3.13}$$

Für $N = 1$ gilt

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Bemerkungen:

(1) Die Beziehung (3.13) ist zu verstehen in dem Sinne, dass z.B. für $p > N$ eine Funktion $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ einen Repräsentanten $\tilde{u}$ besitzt mit $u = \tilde{u}$ fast überall in Ω und $\tilde{u} \in H_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(2) Für $p = N$ gilt i.a. nicht

$$H_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^\infty(\Omega), \\ C^0(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

Ein Gegenbeispiel für $N \geq 2$ ist

$$u(x) := \log|\log|x|| \qquad \text{für } 0 < |x| < \frac{1}{2}.$$

Denn es gilt mit $\Omega := B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^N$, dass $u \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ (wegen $u \in C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$), aber u ist nicht beschränkt.

Außerdem gilt $u \in H^{1,N}(\Omega)$, denn $u \in C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ und

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^N \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{(|x|\,|\log|x||)^N} \\ &= C(N) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}r}{r|\log r|^N} \\ &= \tilde{C}(N) \Big[\frac{1}{|\log r|^{N-1}} \Big]_{r=0}^{r=\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Dabei gilt die 2. Identität nach Einführen von Polar-Koordinaten im $\mathbb{R}^N$. Damit ist bewiesen, dass $u \in H^{1,N}(\Omega \setminus \{0\})$. Dass der Ausnahmepunkt 0 für $H^{1,N}(\Omega)$ irrelevant ist (d.h. dass die Singularität gehoben werden kann), folgt z.B. mit Methoden wie im Satz 3.6: Für zwei kugelförmige Gebiete Ω^+ und Ω^-, deren Abschluss sich genau in 0 berührt, gilt

$$B^+u = B^-u \qquad \text{in } \overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-}.$$

Beweis von Theorem 3.9:

(a) Sei $N > p$.

Ohne Einschränkung sei $u \in C_0^1(\Omega)$. Wir setzen u außerhalb von Ω durch 0 fort.

Dann gilt

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_N) \, \mathrm{d}s \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_N)| \, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Für $N = 1$ folgt hieraus schon

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Ab jetzt sei $N > 1$. Schreiben wir die rechte Seite von (3.14) als $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_i$, so gilt also

$$|u(x)|^{\frac{1}{N-1}} \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Durch Multiplikation dieser N Ungleichungen für $1 \leq i \leq N$ folgt

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_i \right)^{\frac{1}{N-1}}$$

und nach Integration über x_1

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, \mathrm{d}x_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_1 u| \, \mathrm{d}s_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_i \right)^{\frac{1}{N-1}} \mathrm{d}s_1.$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_1 u| \, \mathrm{d}s_1$ unabhängig von s_1 ist, also vor das Integral gezogen werden kann.

Nun verwenden wir die *verallgemeinerte Hölder-Ungleichung*, siehe Aufgabe 8 und Gleichung (B.5), nach der für Exponenten $p_2, \ldots, p_N$ mit $\frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_N} = 1$ und Funktionen $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ gilt

$$\Big\| \prod_{i=2}^{N} \Big\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=2}^{N} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Hier verwenden wir (3.15) mit $f_i := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_i \right)^{\frac{1}{N-1}}$ und $p_2 = \ldots = p_N = N - 1$.

Es folgt

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, \mathrm{d}x_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_1 u| \, \mathrm{d}s_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_i \, \mathrm{d}s_1 \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Nach der Integration über x_1 integrieren wir über x_2 und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \quad &\leq \quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u| \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_1 u| \, \mathrm{d}s_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_i \right)^{\frac{1}{N-1}} \right] \mathrm{d}s_2. \end{aligned}$$

Wieder wird die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung auf das Integral rechts angewandt (mit $p_3 = \ldots = p_N = N - 1$), so dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \quad &\leq \quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u| \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u| \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\ &\prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 \, \mathrm{d}s_i \right)^{\frac{1}{N-1}}. \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir für $j = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^j} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_j \quad &\leq \quad \prod_{i=1}^{j} \left(\int_{\mathbb{R}^j} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_j \right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\ &\prod_{i=j+1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^{j+1}} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_j \, \mathrm{d}s_i \right)^{\frac{1}{N-1}}. \end{aligned}$$

Speziell für $j = N$ heißt dies

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_N &\le \prod_{i=1}^{N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u| \, \mathrm{d}s_1 \dots \mathrm{d}s_N \right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| \, \mathrm{d}s_1 \dots \mathrm{d}s_N \right)^{\frac{N}{N-1}}\end{aligned}$$

bzw.

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}. \tag{3.16}$$

Dies ergibt die Behauptung für $p = 1$. Im allgemeinen Fall ersetzen wir u durch $|u|^\gamma$. Dann folgt mit (3.16) und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}\||u|^\gamma\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} &\le \|\gamma |u|^{\gamma-1} \nabla u\|_{L^1(\Omega)} \\ &\le \|\gamma |u|^{\gamma-1}\|_{L^q(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le c(\gamma) \|u\|_{L^{q(\gamma-1)}(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ferner gilt nach Definition

$$\||u|^\gamma\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{\gamma \frac{N}{N-1}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{N-1}{N}} = \|u\|^\gamma_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}(\Omega)}. \tag{3.18}$$

Wir wählen γ so, dass $\frac{\gamma N}{N-1} = q(\gamma - 1)$. Wegen $q = \frac{p-1}{p}$ ist dies äquivalent zu

$$\gamma = \frac{p(N-1)}{N-p}.$$

(An dieser Stelle geht die Bedingung $p < N$ ein.)

Man kann direkt nachrechnen, dass

$$\frac{\gamma N}{N-1} = \frac{pN}{N-p}. \tag{3.19}$$

Mit dieser Beziehung erhalten wir

$$\begin{aligned}\||u|^\gamma\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} = \|u\|^\gamma_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}(\Omega)} &= \|u\|^\gamma_{L^{\frac{pN}{N-p}}(\Omega)} \\ &\le c(\gamma) \|u\|^{\gamma-1}_{L^{\frac{pN}{N-p}}(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Dabei wurde in der 1. Identität (3.18) verwendet, die 2. Identität ergibt sich aus (3.19). Die letzte Abschätzung ist eine Folge von (3.17).

Für $\|u\|_{L^{\frac{pN}{N-p}}(\Omega)} = 0$ gilt die behauptete Abschätzung trivialerweise. Andernfalls kürzen wir $\|u\|^{\gamma-1}_{L^{\frac{pN}{N-p}}(\Omega)}$ in (3.20) und erhalten

$$\|u\|_{L^{\frac{pN}{N-p}}(\Omega)} \le C(\gamma) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

(b) Sei nun $N < p$ und wie oben $u \in C_0^1(\Omega)$. Wir verwenden die früher bewiesene Beziehung (3.10), nach der

$$\Big| \fint_\Omega u \,\mathrm{d}y - u(x)\Big| \leq c \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}} \,\mathrm{d}y$$

bzw.

$$|u(x)| \leq c \int_\Omega |u| \,\mathrm{d}y + \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}} \,\mathrm{d}y.$$

Wenden wir die Hölder-Ungleichung (mit $1/p + 1/q = 1$) auf jedes der Integrale rechts an, so folgt mit einer Konstante $c = c(p, \Omega)$

$$|u(x)| \leq c \left(\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} + \underbrace{\left(\int_\Omega |x-y|^{(1-N)q} \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}}}_{=:R} \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}.$$

Das 1. Integral rechts ist beschränkt wegen $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Weiter zeigen wir, dass $R < \infty$. Dazu führen wir Polar-Koordinaten ein und setzen $d := \operatorname{diam}(\Omega) < \infty$. Dann gilt

$$|R| \leq C \int_0^d |r|^{(1-N)q+N-1} \,\mathrm{d}r < \infty,$$

falls $(1-N)q+N-1 > -1$, was äquivalent ist zu $(N-1)(1-\frac{p}{p-1}) = (N-1)(\frac{-1}{p-1}) > -1$, was wiederum äquivalent ist zu $N < p$.

Sei nun $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ beliebig und $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C_0^1(\Omega)$ sei eine Cauchy-Folge mit $u_m \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$. Nach dem gerade Bewiesenen gilt

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| \leq c(p,\Omega)\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}.$$

Also ist $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0(\overline{\Omega})$. Damit ist auch der Limes $u \in C^0(\overline{\Omega})$. $\square$

Korollar 3.1 (Einbettungssatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Dann gilt*

(a) $H_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-kp}}(\Omega)$, *falls* $k - \frac{N}{p} < 0$,

(b) $H_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$, *falls* $0 \leq m < k - \frac{N}{p}$.

Beweis: (a) Für $u \in H_0^{k,p}(\Omega)$ gilt $\partial^\alpha u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq k-1$. Nach Satz 3.9 gilt

$$\partial^\alpha u \in L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$$

falls $p < N$ und $|\alpha| \leq k-1$ oder falls $p > N$, da in letzterem Fall $\partial^\alpha u \in C^0(\overline{\Omega})$. Es folgt daher

$$u \in H_0^{k-1,p_1}(\Omega), \qquad p_1 := \frac{Np}{N-p}.$$

Iterativ folgt

$$u \in H_0^{k-2,p_2}(\Omega) \qquad \text{mit } p_2 := \frac{Np_1}{N-p_1} = \frac{Np}{N-2p},$$

$$\vdots$$

$$u \in L^{p_k}(\Omega) \qquad \text{mit } p_k := \frac{Np}{N-kp}.$$

Die Stetigkeit der Einbettung $H_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-kp}}(\Omega)$ folgt daraus, dass man in jedem der obigen Schritte eine stetige Einbettung hat.

(b) Sei $u \in H_0^{k,p}(\Omega)$.

1. Fall: $p > N$. Es ist $\partial^\alpha u \in H^{1,p}(\Omega)$ für $|\alpha| \le k-1$. Nach Satz 3.9 folgt

$$\partial^\alpha u \in C^0(\overline{\Omega}) \qquad \text{für } |\alpha| \le k-1,$$

also gilt $u \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$, somit

$$u \in C^m(\overline{\Omega}) \qquad \text{für } 0 \le m < k - \frac{N}{p}.$$

2. Fall: $p < N$. Falls für ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ gilt $\partial^{\tilde{m}} u \in H_0^{k-m,p}(\Omega)$, so folgt mit Teil (a) dieses Beweises

$$\partial^{\tilde{m}} u \in L^{\frac{NP}{N-(k-\tilde{m})p}}(\Omega) =: L^{p_1}(\Omega).$$

Daher

$$u \in H^{\tilde{m},p_1}(\Omega). \tag{3.21}$$

Wir prüfen direkt, dass $p_1 > N$ gilt. Dies ist äquivalent zu $p > N - (k-\tilde{m})p$, was äquivalent ist zu $k - \frac{N}{p} > m$, wenn wir $\tilde{m} := m+1$ setzen.

Aus (3.21) und $p_1 > N$ folgt mit dem 1. Fall $u \in C^{\tilde{m}-1}(\overline{\Omega}) = C^m(\overline{\Omega})$. $\square$

Wir erwähnen noch ohne Beweis den folgenden

Theorem 3.10 (Sobolev-Einbettungssatz) *Sei $1 \le p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt, $m \ge 1$ und $k \ge 0$. Dann existiert die Einbettung*

$$H_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Sie ist stetig für $k - \frac{N}{p} = m + \alpha$ mit $0 < \alpha < 1$. Sie ist kompakt, falls $k - \frac{N}{p} > m + \alpha$ und $0 \le \alpha \le 1$.

Definition: Eine Einbettung $J : X \to Y$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ die Folge $(J(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Beweis von Satz 3.10: Siehe [2].

Kapitel 4

Die direkte Methode für Sobolev-Funktionen

4.1 Einführung

In diesem Kapitel betrachten wir erneut Funktionale der Form

$$F(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x$$

und studieren das Optimierungs-Problem

$$F(u) \to \min \qquad \text{für } u \in K \tag{4.1}$$

für eine abgeschlossene, nichtleere Menge

$$K \subset H^{1,q}((a,b); \mathbb{R}^M).$$

Im Gegensatz zu den klassischen Untersuchungen des Kapitels 2 liegt u also in einem Sobolev-Raum. **Für das gesamte Kapitel wollen wir annehmen, dass $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein *beschränktes* Intervall ist**.

Zur Anwendbarkeit der direkten Methode der Variationsrechnung auf das Problem (4.1) sind die folgenden Schritte maßgeblich:

1. Verifikation von $K \neq \emptyset$.
2. *Existenz einer unteren Schranke* an F, d.h. einer Konstante $C \geq 0$, so dass
$$F(u) \geq -C \qquad \forall u \in K.$$
3. Auswahl einer *Minimalfolge* in K, d.h. Wahl einer Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K$ mit
$$F(u_j) \to \inf_{\tilde{u}\in K} F(\tilde{u}) \qquad \text{für } j \to \infty.$$
4. *Existenz einer konvergenten Teilfolge*, d.h. Existenz von $(u_{j_l})_{l\in\mathbb{N}} \subset (u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $u_{j_l} \rightharpoonup u \in K$ für $l \to \infty$.

5. *Unterhalbstetigkeit von F* bezüglich schwacher Topologie, d.h.

$$F(u) \le \liminf_{l\to\infty} F(u_{j_l})$$

für jede Folge $(u_{j_l})_{l\in\mathbb{N}} \subset K$ mit Grenzwert u wie in Schritt 4.

Aus den obigen Schritten folgt

$$-\infty \overset{2.}{<} \inf_{\tilde{u}\in K} F(\tilde{u}) \overset{4.}{\le} F(u) \overset{5.}{\le} \liminf_{l\to\infty} F(u_{j_l}) \overset{3.}{=} \inf_{\tilde{u}\in K} F(\tilde{u}).$$

Diese Kette zeigt

$$F(u) = \inf_{\tilde{u}\in K} F(\tilde{u}),$$

also die Lösbarkeit des Optimierungsproblems.

Lemma 4.1 *Sei $f \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M \to [0,\infty)$ eine* Carathéodory-Funktion*, d.h.*

- *$f(\cdot,z,p)$ ist messbar für alle $(z,p)\in\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M$,*
- *$(z,p)\mapsto f(x,z,p)\in C^0(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M)$ für fast alle $x\in(a,b)$.*

Dann ist $F(u)$ wohldefiniert mit Werten in $[0,\infty)$ für alle $u\in H^{1,q}((a,b);\mathbb{R}^M)$ und $1\le q\le\infty$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $x\mapsto f(x,u(x),u'(x))$ messbar ist. Für $f = f(z,p)$ (unabhängig von x) ist dies klar, denn f ist dann nach Voraussetzung stetig. Somit ist auch für $u,\ u'\in L^q((a,b);\ \mathbb{R}^M)$ die Komposition $F\circ(u,u')$ messbar auf (a,b).

Im allgemeinen Fall $f = f(x,z,p)$ approximieren wir $(u,u')\in L^q((a,b);\mathbb{R}^M)$ durch Treppenfunktionen (t_j,t_j'), wobei $(t_j,t_j')\to(u,u')$ für $j\to\infty$ fast überall in (a,b) und

$$(t_j(x),t_j'(x)) = \sum_{k=1}^{k_j} \alpha_k^j \mathcal{X}_{A_k^j}(x).$$

Hier sind $k_j\in\mathbb{N}$, $\alpha_k^j\in\mathbb{R}^{2M}$ für alle $j\in\mathbb{N}$ und alle $1\le k\le k_j$, und $A_k^j\subset(a,b)$ sind messbare, paarweise disjunkte Mengen.

Damit erhalten wir für alle $r\ge 0$

$$\begin{aligned}(f(\cdot,t_j(\cdot),t_j'(\cdot)))^{-1}(r,\infty) &= \{x\in(a,b)\mid f(x,t_j(x),t_j'(x))>r\}\\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\left\{x\in(a,b)\mid f(x,\alpha_k^j)>r\right\}\cap A_j^k\right)\\ &\quad \cup\{x\in(a,b)\mid f(x,0,0)>r\}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Dabei repräsentiert die Menge $\{x\in(a,b)\mid f(x,0,0)>r\}$ den Fall $\mathcal{X}_{A_j^k}(x)=0$.

Nach Voraussetzung an f sind die Mengen

$$A_k^j,\quad \{x\in(a,b)\mid f(x,\alpha_k^j)>r\},\quad \{x\in(a,b)\mid f(x,0,0)>r\}$$

messbar, somit ist auch die rechte Seite von (4.2) messbar für alle $j \in \mathbb{N}$, also ist auch $f(\cdot, t_j(\cdot), t_j'(\cdot))$ messbar auf (a,b) für alle $j \in \mathbb{N}$.

Aufgrund der Stetigkeit von $(z,p) \mapsto f(x,z,p)$ gilt für $j \to \infty$

$$f(x, t_j(x), t_j'(x)) \to f(x, u(x), u'(x)) \qquad \text{für f.a. } x \in (a,b)$$

und damit ist $f(x, u(x), u'(x))$ als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen wieder messbar nach einem Satz der Maßtheorie, siehe [15, Prop. 5.3.12]. $\square$

4.2 Kriterien für die Unterhalbstetigkeit

Im folgenden untersuchen wir den Punkt 5 der Liste aus Sektion 4.1 und stellen Kriterien für die schwache Unterhalbstetigkeit von F bereit.

Lemma 4.2 (Notwendige Bed. für schwache Unterhalbstetigkeit von F) *Sei $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$, $1 \le q < \infty$, und F* schwach unterhalbstetig *in $H^{1,q}((a,b);\, \mathbb{R}^M)$, d.h.*

$$F(u) \le \liminf_{j\to\infty} F(u_j)$$

für alle Folgen $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H^{1,q}((a,b);\, \mathbb{R}^M)$ und Funktionen $u \in H^{1,q}((a,b);\, \mathbb{R}^M)$ mit $u_j \rightharpoonup u$ in $u \in H^{1,q}((a,b);\, \mathbb{R}^M)$ für $j \to \infty$.

Dann gilt für alle $(\overline{x}, \overline{z}, \overline{p}) \in (a,b) \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$

$$\int_a^b f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{p} + \varphi'(x))\,\mathrm{d}x \ge (b-a) f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{p}) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty((a,b);\, \mathbb{R}^M). \tag{4.3}$$

Ferner ist $f(x,z,\cdot)$ konvex für alle $(x,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^M$.

Bemerkung und Definition:

- Eine messbare und lokal integrierbare Funktion $f(x,z,p)$, die (4.3) erfüllt, heißt *quasikonvex* (in p). Es gilt allgemein:

  $$f \text{ konvex (in } p) \Rightarrow f \text{ quasikonvex (in } p).$$

  Die Umkehrung gilt für $N \ge 2$ i.a. nicht.

- Die Aussagen von Lemma 4.2 gelten nur für $N = 1$, d.h. für $\Omega \subset \mathbb{R}$. Im vektorwertigen Fall $N > 1$ ist die Quasikonvexität von f notwendig und hinreichend nach einem Satz von Morrey.

- Die Quasikonvexität ist im allgemeinen schwierig nachzuprüfen. Es ist daher in der Praxis häufig einfacher, die *Polykonvexität* von f zu verifizieren, die die Quasikonvexität impliziert. Dabei heißt eine Funktion *polykonvex*, wenn sie konvex in allen Subdeterminanten der Matrix $p = Df$ ist. (Für $N > 1$ ist Df eine Matrix.)

Beweis: D.E.h. sei im folgenden $(a, b) = (0, 1)$.

1. Fall: Sei $f = f(p)$ und $\overline{p}$ gegeben.

Wir setzen $\varphi \in C_0^\infty((0,1); \mathbb{R}^M)$ zu einer periodischen Funktion in $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^M)$ fort. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\varphi_k(x) := \frac{1}{k}\varphi(kx).$$

Somit ist $\varphi_k'(x) = \varphi'(kx)$ und aufgrund der Beschränktheit von $[a, b] = [0, 1]$ gilt

$$\|\varphi_k'\|_{C^0([0,1];\, \mathbb{R}^M)} \leq c_1$$

für eine Konstante $c_1 \geq 0$. Sei

$$\begin{aligned} \overline{u}(x) &:= \overline{p}x, \\ u_k(x) &:= \overline{u}(x) + \varphi_k(x). \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |u_k'(x)| &\leq |\overline{u}'(x)| + |\varphi_k'(x)| = |\overline{p}| + |\varphi_k'(x)| \\ &\leq |\overline{p}| + c_1 =: c_2. \end{aligned}$$

Wir erhalten für alle $x \in [0, 1]$

$$|u_k(x) - \overline{u}(x)| = |\varphi_k(x)| = \left|\frac{1}{k}\varphi(kx)\right| \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty. \tag{4.4}$$

Folglich gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|u_k\|_{C^1([0,1];\, \mathbb{R}^M)} \leq C,$$

also auch

$$\|u_k\|_{H^{1,\tilde{q}}((0,1);\, \mathbb{R}^M)} \leq C \qquad \text{für alle } 1 \leq \tilde{q} \leq \infty.$$

Falls für das q aus der Formulierung von Lemma 4.2 gilt $q \in (1, \infty)$ (also $q > 1$), so ist wegen der Reflexivität von $H^{1,q}((0,1); \mathbb{R}^M)$ die Existenz einer Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $u_k \rightharpoonup \overline{u}$ in $H^{1,q}((0,1); \mathbb{R}^M)$ für $j \to \infty$ unmittelbar klar nach Satz 3.8 über die schwache Folgenkompaktheit in $B_C(0) \subset H^{1,q}((0,1); \mathbb{R}^M)$. Da bereits die ursprüngliche Folge u_k wegen (4.4) gleichmäßig in $(0, 1)$ konvergiert, gilt sogar für die ganze Folge

$$u_k \rightharpoonup \overline{u} \qquad \text{in } H^{1,q}((0,1); \mathbb{R}^M) \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Für $q = 1$ gilt

$$H^{1,\tilde{q}}((0,1); \mathbb{R}^M) \subset H^{1,1}((0,1); \mathbb{R}^M) \qquad \text{für alle } 1 \leq \tilde{q} < \infty$$

und damit

$$\Big(H^{1,1}((0,1); \mathbb{R}^M)\Big)' \subset \Big(H^{1,\tilde{q}}((0,1); \mathbb{R}^M)\Big)'.$$

Denn: Die Aussage $u_k \rightharpoonup \overline{u}$ in $H^{1,q}((0,1); \mathbb{R}^M)$ ist äquivalent zu

$$\langle u_k, L\rangle \to \langle \overline{u}, L\rangle \qquad \text{für alle } L \in \Big(H^{1,q}\big((0,1); \mathbb{R}^M\big)\Big)'.$$

Aufgrund der Beschränktheit von $(0,1)$ gilt mit der Hölder-Ungleichung für jedes $\tilde{L} \in \big(H^{1,1}((0,1);\,\mathbb{R}^M)\big)'$ und für alle $v \in H^{1,q}((0,1);\,\mathbb{R}^M)$

$$\begin{aligned}\big|\langle v, \tilde{L}\rangle\big| &\leq \|\tilde{L}\|_{(H^{1,1}((0,1);\,\mathbb{R}^M))'}\|v\|_{H^{1,1}((0,1);\,\mathbb{R}^M)}\\ &\leq |b-a|^{1-\frac{1}{q}}\|\tilde{L}\|_{(H^{1,1}((0,1);\,\mathbb{R}^M))'}\|v\|_{H^{1,q}((0,1);\,\mathbb{R}^M)}.\end{aligned}$$

Folglich

$$\|\tilde{L}\|_{(H^{1,q}((0,1);\,\mathbb{R}^M))'} \leq |b-a|^{1-\frac{1}{q}}\|\tilde{L}\|_{(H^{1,1}((0,1);\,\mathbb{R}^M))'}$$

und

$$\langle u_k, \tilde{L}\rangle \to \langle \overline{u}, \tilde{L}\rangle \qquad \text{für alle } L \in \big(H^{1,q}((0,1);\,\mathbb{R}^M)\big)',$$

also

$$u_k \rightharpoonup \overline{u} \qquad \text{in } H^{1,q}((0,1);\,\mathbb{R}^M) \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Daher erfüllt die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $1 \leq q < \infty$ die Voraussetzungen von Lemma 4.2, so dass gilt

$$\begin{aligned}(b-a)f(\overline{p}) \;=\; F(\overline{u}) \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} F(u_k) \;&=\; \liminf_{k\to\infty}\int_0^1 f(\overline{p}+\varphi_k'(x))\,\mathrm{d}x\\ &=\; \liminf_{k\to\infty}\int_0^1 f(\overline{p}+\varphi'(kx))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Substituieren wir $z := kx$, so folgt

$$\begin{aligned}(b-a)f(\overline{p}) &\leq \liminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int_0^k f(\overline{p}+\varphi'(z))\,\mathrm{d}z\\ &= \liminf_{k\to\infty}\int_0^1 f(\overline{p}+\varphi'(z))\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1 f(\overline{p}+\varphi'(z))\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Dabei gilt die 1. Gleichheit rechts aufgrund der Periodizität von φ.

<u>2. Fall</u>: Sei $f = f(x,z,p)$ und $\overline{x} \in (0,1)$, $\overline{z} \in \mathbb{R}^M$, $\overline{p} \in \mathbb{R}^M$ gegeben.

Wir definieren für $0 < h < \operatorname{dist}(\overline{x}, \partial(0,1))$

$$I_h := (\overline{x}, \overline{x}+h) \subset (0,1).$$

Wir setzen wie im 1. Fall $\varphi \in C_0^\infty((0,1);\,\mathbb{R}^M)$ periodisch zu einer Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort und definieren für $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_k(x) := \frac{h}{k}\varphi\Big(\frac{k}{h}(x-\overline{x})\Big),$$

so dass $\varphi_{k|I_h} \in C_0^\infty(I_h;\,\mathbb{R}^M)$. Wir führen weiter ein

$$\overline{u}(x) := \overline{z} + \overline{p}(x-\overline{x})$$

und

$$u_k(x) := \begin{cases} \overline{u}(x) + \varphi_k(x) & \text{für } x \in I_h, \\ \overline{u}(x) & \text{für } x \in [0,1] \setminus I_h. \end{cases}$$

Die so definierten Funktionen u_k sind stetig auf $[0,1]$.

Wie im 1. Fall gilt für $k \to \infty$

$$|u_k(x) - \overline{u}(x)| \to 0 \qquad \text{für alle } x \in [0,1],$$

also $u_k \to \overline{u}$ in $C^0([0,1];\, \mathbb{R}^M)$ für $k \to \infty$. Wegen

$$\varphi_k'(x) = \varphi'\Big(\frac{k}{h}(x - \overline{x})\Big)$$

und der Kompaktheit von $[0,1]$ sind die Funktionen u_k' gleichmäßig beschränkt auf $[0,1]$. Mit denselben Argumenten wie im 1. Fall ergibt sich für alle $1 \leq q < \infty$

$$u_k \rightharpoonup \overline{u} \qquad \text{in } H^{1,q}((0,1);\, \mathbb{R}^M) \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Sei nun

$$x_i := \overline{x} + \frac{ih}{k} \qquad \text{für } 0 \leq i \leq k$$

und weiter

$$F_h(u_k) := \int\limits_{I_h} f(x, u_k(x), u_k'(x))\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u_k(x), u_k'(x))\, \mathrm{d}x.$$

Wir substituieren im i-ten Integral rechts $x = x_i + \frac{h}{k}y$. Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi_k'(x) &= \varphi'\Big(\frac{k}{h}(x - \overline{x})\Big) = \varphi'\Big(\frac{k}{h}\Big(x_i + \frac{h}{k}y - \overline{x}\Big)\Big) \\ &= \varphi'(y + i) = \varphi'(y), \end{aligned}$$

(die letzte Gleichheit folgt daraus, dass φ periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wurde mit Periode 1) und daher

$$F_h(u_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h}{k} \int\limits_0^1 f\Big(x_i + \frac{h}{k}y, u_k\big(x_i + \frac{h}{k}y\big), \overline{p} + \varphi'(y)\Big)\, \mathrm{d}y.$$

Wir zeigen nachfolgend, dass

$$\lim_{k\to\infty} F_h(u_k) = \int\limits_{\overline{x}}^{\overline{x}+h} \int\limits_0^1 f(x, \overline{u}(x), \overline{p} + \varphi'(y))\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

Beweis: Da nach Voraussetzung $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$ und $u_k \to \overline{u}$ für $k \to \infty$ in $C^0((0,1);\, \mathbb{R}^M)$, gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq N(\varepsilon)$ und alle $0 \leq i \leq k-1$

$$\left| \int\limits_0^1 f(x_i, \overline{u}(x_i), \overline{p} + \varphi'(y))\, \mathrm{d}y - \int\limits_0^1 f\Big(x_i + \frac{h}{k}y, u_k\big(x_i + \frac{h}{k}y\big), \overline{p} + \varphi'(y)\Big)\, \mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
&\left|F_h(u_k) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h}{k} \int_0^1 f(x_i, \overline{u}(x_i), \overline{p} + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\right| \\
&\quad \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h}{k} \left| \int_0^1 f\Big(x_i + \frac{h}{k}y, u_k\big(x_i + \frac{h}{k}y\big), \overline{p} + \varphi'(y)\Big)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 f(x_i, \overline{u}(x_i), \overline{p} + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y \right| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon h}{2k} \sum_{i=0}^{k-1} 1 = \frac{\varepsilon h}{2} < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

für alle $k \geq N(\varepsilon)$.

Die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$
g(x) := \int_0^1 f(x, \overline{u}(x), \overline{p} + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y
$$

ist stetig auf $[0,1]$ und Riemann-integrierbar auf I_h. Dies impliziert:

Es existiert $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $N_1(\varepsilon) \geq N(\varepsilon)$, so dass für alle $k \geq N_1(\varepsilon)$

$$
\left| \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+h} \int_0^1 f(x, \overline{u}(x), \overline{p} + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h}{k} \int_0^1 f(x_i, \overline{u}(x_i), \overline{p} + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{2}.
$$

Also insgesamt

$$
\left| F_h(u_k) - \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+h} \int_0^1 f(x, \overline{u}(x), \overline{p} + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } k \geq N_1(\varepsilon).
$$

Dies beweist (4.5).

Aufgrund der vorausgesetzten Unterhalbstetigkeit von F gilt

$$
\begin{aligned}
F(\overline{u}) &= \int_{(0,1)\setminus I_h} f(x, \overline{u}(x), \overline{p})\,\mathrm{d}x + \int_{I_h} f(x, \overline{u}, \overline{p})\,\mathrm{d}x \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left[\int_{(0,1)\setminus I_h} f(x, u_k(x), u_k'(x))\,\mathrm{d}x + \int_{I_h} f(x, u_k(x), u_k'(x))\,\mathrm{d}x \right] \\
&= \int_{(0,1)\setminus I_h} f(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))\,\mathrm{d}x + \liminf_{k\to\infty} F_h(u_k).
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile ergibt sich dabei aus $u_k(x) = \overline{u}(x)$ für $x \in (0,1) \setminus I_h$.

Subtrahieren wir das 1. Integral auf beiden Seiten der Ungleichung und multiplizieren die entstehende Abschätzung mit $\frac{1}{h}$, so finden wir

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+h} f(x, \overline{u}(x), \overline{p})\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{h} \liminf_{k\to\infty} F_h(u_k) = \frac{1}{h} \lim_{k\to\infty} F_h(u_k) \\
&= \frac{1}{h} \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+h} \int_0^1 f(x, \overline{u}(x), \overline{p} + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Nun bilden wir den Limes $h \searrow 0$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt dann wegen $\overline{u}(x) = \overline{z} + \overline{p}(x - \overline{x})$

$$f(x, \overline{u}(x), \overline{p}) \leq \int_0^1 f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{p} + \varphi'(y))\, \mathrm{d}y.$$

Dies ist die behauptete Quasi-Konvexität von f (in p).

Beweis der Konvexität von $F(x, z, \cdot)$:

Zunächst eine Vorüberlegung: Anstelle von $\varphi \in C_0^\infty((0,1);\, \mathbb{R}^M)$ können wir den obigen Beweis auch für $\varphi \in C^{0,1}([0,1]; \mathbb{R}^M)$ führen mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Solch ein φ erfüllt nach den Sobolev-Einbettungs-Sätzen $\varphi \in H^{1,\infty}((0,1);\, \mathbb{R}^M)$, also nach der Hölder-Ungleichung wegen der Beschränktheit von $(0,1)$ wie im Beweis von Lemma 4.2 ausgeführt $\varphi \in H^{1,q}((0,1);\, \mathbb{R}^M)$ für beliebiges $1 \leq q \leq \infty$. Nach dem Satz 3.6 über die Randwerte von Sobolev-Funktionen ist dann auch $\varphi \in H_0^{1,q}((0,1);\, \mathbb{R}^M)$. Also existieren nach Satz 3.2 Funktionen $\varphi_n \in C_0^\infty((0,1);\, \mathbb{R}^M)$ mit

$$\varphi_n \to \varphi \qquad \text{in } H^{1,q}((0,1);\, \mathbb{R}^M) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Für eine Teilfolge von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann $\varphi_n'(x) \to \varphi'(x)$ für fast alle $x \in (0,1)$ und daher für $\varrho := \|\varphi'\|_{L^\infty((0,1);\, \mathbb{R}^M)}$

$$f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{p} + \varphi_n'(y)) \leq \sup_{p \in B_\varrho(\overline{p})} f(\overline{x}, \overline{z}, p) =: C < \infty. \tag{4.6}$$

Die Konstante C ist also eine L^1-Majorante. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz A.7, gilt daher nach (4.6) für $k \to \infty$

$$\int_0^1 f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{p} + \varphi_n'(y))\, \mathrm{d}y \to \int_0^1 f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{p} + \varphi'(y))\, \mathrm{d}y,$$

also

$$f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{p}) \quad \leq \quad \int_0^1 f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{p} + \varphi'(y))\, \mathrm{d}y \qquad \text{für alle } \varphi \in C^{0,1}((0,1);\, \mathbb{R}^M),$$
$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \tag{4.7}$$

Beweis der Konvexität: Seien $p_1,\, p_2 \in \mathbb{R}^M$, $\lambda \in [0,1]$ und $\overline{p} = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$.

Wir definieren die Lipschitzstetige Funktion

$$\psi(x) := \begin{cases} xp_1, & x \in [0, \lambda], \\ \lambda p_1 + (x - \lambda)p_2, & x \in (\lambda, 1], \end{cases}$$

so dass

$$\psi'(x) := \begin{cases} p_1, & x \in [0, \lambda), \\ p_2, & x \in (\lambda, 1], \end{cases}$$

Wir setzen $\varphi(x) := \psi(x) - \overline{p}x$, also $\varphi \in C^{0,1}([0,1];\, \mathbb{R}^M)$. Nach Definition von ψ gilt $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \psi(1) - \overline{p} = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 - \overline{p} = 0$.

Setzen wir dieses φ in (4.7) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(\overline{x},\overline{z},\lambda p_1+(1-\lambda)p_2) &= f(\overline{x},\overline{z},\overline{p}) \\
&\leq \int_0^1 f(\overline{x},\overline{z},\overline{p}+\varphi'(y))\,\mathrm{d}y = \int_0^1 f(\overline{x},\overline{z},\psi'(y))\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\lambda f(\overline{x},\overline{z},p_1)\,\mathrm{d}y + \int_\lambda^1 f(\overline{x},\overline{z},p_1)\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda f(\overline{x},\overline{z},p_1) + (1-\lambda) f(\overline{x},\overline{z},p_2). \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man anstelle der schwachen Unterhalbstetigkeit von f die *schwache Oberhalbstetigkeit* fordert, d.h.

$$F(u) \geq \limsup_{k\to\infty} F(u_k)$$

für jede Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $u_k \rightharpoonup u$ für $k\to\infty$, so ergibt sich analog Lemma 4.2

$$\int_a^b f(\overline{x},\overline{z},\overline{p}+\varphi'(x))\,\mathrm{d}x \leq (b-a) f(\overline{x},\overline{z},\overline{p}) \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((a,b);\,\mathbb{R}^M),$$

also Ungleichung (4.3) mit umgekehrtem Vorzeichen. In diesem Fall ist $f(x,z,\cdot)$ konkav (in p).

Diese Überlegungen führen zu

Korollar 4.1 *Sei $(a,b)\subset\mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $1\leq q<\infty$, und $f\in C^0([a,b]\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M)$. Dann ist die Abbildung*

$$u \mapsto \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x$$

genau dann schwach stetig in $H^{1,q}((a,b);\,\mathbb{R}^M)$, wenn $p\mapsto f(x,z,p)$ linear ist für alle $(x,z)\in[a,b]\times\mathbb{R}^M$, d.h. wenn es $A\in C^0([a,b]\times\mathbb{R}^M;\,\mathbb{R}^M)$ und $B\in C^0([a,b]\times\mathbb{R}^M;\,\mathbb{R})$ gibt mit

$$f(x,z,p) = A(x,z)\cdot p + B(x,z) \qquad \textit{für alle } (x,z,p)\in[a,b]\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M.$$

Beweis: '$\Rightarrow$': Nach Voraussetzung ist F schwach stetig, also

$$F(u) = \lim_{k\to\infty} F(u_k) \qquad \text{für alle } (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^{1,q}((a,b);\,\mathbb{R}^M) \text{ mit } u_k \rightharpoonup u.$$

Also ist $f(x,z,\cdot)$ sowohl konvex als auch konkav gemäß Lemma 4.2 sowie der anschließenden Bemerkung. Daher ist $p\mapsto f(x,z,p)$ linear. Die Stetigkeit von A und B folgt aus $f\in C^0([a,b]\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M)$.

'$\Leftarrow$': Sei $f(x,z,p)=A(x,z)\cdot p+B(x,z)$ wie oben. Zum Beweis der schwachen Stetigkeit sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $u_k\rightharpoonup u$ in $H^{1,q}((a,b);\,\mathbb{R}^M)$. Da schwach konvergente Folgen beschränkt sind, gilt

$$\|u_k\|_{H^{1,q}((a,b);\,\mathbb{R}^M)} \leq c \qquad \text{für alle } k\in\mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Da eine stetige Einbettung $H^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ für $\Omega \subset \mathbb{R}$ existiert, gilt dann

$$u_k \to u \qquad \text{in } C^0([a,b];\, \mathbb{R}^M) \text{ für } k \to \infty,$$

so dass

$$\begin{aligned}
&|F(u_k) - F(u)| \\
&\quad = \left| \int_a^b f(x, u_k(x), u_k'(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \right| \\
&\quad = \left| \int_a^b A(x, u_k(x)) \cdot u_k'(x) - A(x, u(x)) \cdot u'(x) + B(x, u_k(x)) - B(x, u(x))\,\mathrm{d}x \right| \\
&\quad = \Bigg| \int_a^b A(x, u(x)) \cdot (u_k'(x) - u'(x)) + \big(A(x, u_k(x)) - A(x, u(x))\big) \cdot u_k'(x) \\
&\qquad\quad + B(x, u_k(x)) - B(x, u(x))\,\mathrm{d}x \Bigg| \\
&\quad \le \left| \int_a^b A(x, u(x)) \cdot (u_k'(x) - u'(x))\,\mathrm{d}x \right| + \int_a^b \Big| B(x, u_k(x)) - B(x, u(x)) \Big|\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + \int_a^b \Big| A(x, u_k(x)) - A(x, u(x)) \Big|\, |u_k'(x)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Das 1. Integral in der letzten Ungleichung konvergiert für $k \to \infty$ gegen 0, da $u_k \rightharpoonup u$, das 2. und 3. Integral konvergieren gegen 0, da $u_k \to u$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert und da $|u_k'(x)| \le c$ gleichmäßig in k wegen (4.8). Damit konvergieren alle Ausdrücke rechts gegen 0 für $k \to \infty$, also haben wir

$$F(u_k) \to F(u) \qquad \text{für } k \to \infty. \quad \square$$

Das folgende hinreichende Konvergenzkriterium für die Unterhalbstetigkeit von F ist berühmt und in der Praxis leicht nachzurechnen.

Theorem 4.1 (Tonelli) *Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Ferner gelte*

(1) $f, \frac{\partial f}{\partial p} \in C^0([a,b] \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$.

(2) $f(x,z,p) \ge g(x)$ für alle $(x,z,p) \in (a,b) \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ für eine Funktion $g \in L^1((a,b))$.

(3) $f(x,z,\cdot)$ ist konvex.

Dann ist

$$F(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x$$

schwach unterhalbstetig in $H^{1,q}((a,b);\, \mathbb{R}^M)$ für jedes $1 \le q < \infty$.

Bemerkung: Es gibt eine Verschärfung von Satz 4.1, die auf de Giorgi zurückgeht, wobei anstelle von (1) nur gefordert wird, dass f eine Carathéodory-Funktion ist, also $f(\cdot, z, p)$ messbar ist und $f(x, \cdot, \cdot)$ stetig.

Beweis: Ohne Einschränkung können wir $f \geq 0$ annehmen. Andernfalls betrachten wir $f(x, z, p) - g$ anstelle von f.

Wegen der Stetigkeit der Einbettung $H^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ gilt für eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^{1,q}((a,b);\ \mathbb{R}^M)$ mit $u_k \rightharpoonup u$ auch $u_k \to u$ in $C^0([a,b];\ \mathbb{R}^M)$ für $k \to \infty$. Analog zum Beweis in Lemma 4.2 können wir aufgrund der Beschränktheit von (a,b) mit Hilfe der Hölder-Ungleichung wieder zeigen, dass auch

$$u_k \rightharpoonup u \qquad \text{in } H^{1,1}((a,b);\ \mathbb{R}^M).$$

Wie aus [2][Lemma A1.20] folgt, ist für $E \subset (a,b)$ die Mengenfunktion

$$E \mapsto \int\limits_E f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x$$

absolut stetig, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für alle $E \subset (a,b)$ messbar mit $\mathcal{L}^1((a,b) \setminus E) < \delta$ gilt

$$\int\limits_E f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \geq F(u) - \varepsilon. \tag{4.9}$$

Nach dem Satz von Lusin, siehe z.B. [2], existiert eine kompakte Menge $M_\varepsilon \subset (a,b)$, so dass $u(x)$ und die schwache Ableitung $u'(x)$ stetig auf M_ε sind und

$$\mathcal{L}^1((a,b) \setminus M_\varepsilon) < \delta,$$

was aufgrund der Messbarkeit von M_ε nach (4.9) die Abschätzung

$$\int\limits_{M_\varepsilon} f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \geq F(u) - \varepsilon \tag{4.10}$$

impliziert. Nachfolgend schätzen wir $F(u_k)$ nach unten ab unter Verwendung der Voraussetzungen.

$$\begin{aligned} F(u_k) &\geq \int\limits_{M_\varepsilon} f(x, u(x), u_k'(x))\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int\limits_{M_\varepsilon} f(x, u_k(x), u'(x))\,\mathrm{d}x + \int\limits_{M_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial p}(x, u_k(x), u'(x)) \cdot (u_k'(x) - u'(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{M_\varepsilon} f(x, u_k(x), u'(x))\,\mathrm{d}x + (I) + (II) + (III). \end{aligned}$$

Dabei gilt die 1. Abschätzung wegen $f \geq 0$ und $M_\varepsilon \subset (a,b)$, die 2. Abschätzung ist eine Folge der Konvexität von $f(x, z, \cdot)$.

Die oben eingeführten Terme sind

$$
\begin{aligned}
(I) &= \int\limits_{M_\varepsilon} f(x, u_k(x), u'(x))\,\mathrm{d}x - \int\limits_{M_\varepsilon} f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x, \\
(II) &= \int\limits_{M_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x)) \cdot \big(u_k'(x) - u'(x)\big)\,\mathrm{d}x, \\
(III) &= \int\limits_{M_\varepsilon} \Big(\frac{\partial f}{\partial p}(x, u_k(x), u'(x)) - \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x))\Big) \cdot \big(u_k'(x) - u'(x)\big)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Für $k \to \infty$ gilt

$\underline{(I) \to 0}$, da $f \in C^0([a,b] \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$, $u_k \to u$ in $C^0([a,b];\, \mathbb{R}^M)$, und wegen u' beschränkt auf M_ε.

$\underline{(II) \to 0}$, da $u_k \rightharpoonup u$ in $H^{1,1}((a,b);\, \mathbb{R}^M)$ und $\frac{\partial f}{\partial p}(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \in C^0(M_\varepsilon;\, \mathbb{R}^M)$.

$\underline{(III) \to 0}$, da $\frac{\partial f}{\partial p} \in C^0([a,b] \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$, u' beschränkt auf M_ε, $u_k \to u$ in $C^0([a,b];\, \mathbb{R}^M)$; und weil $\|u_k' - u'\|_{L^1((a,b);\, \mathbb{R}^M)}$ beschränkt ist in Folge der schwachen Konvergenz von $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Insgesamt ergibt sich also für alle $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
\liminf_{k \to \infty} F(u_k) &\geq \int\limits_{M_\varepsilon} f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int\limits_a^b f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x - \varepsilon = F(u) - \varepsilon.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Dabei erhalten wir die zweite Ungleichung als Folge von (4.10). Die Abschätzung (4.11) gilt für alle $\varepsilon > 0$. Im Limes $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung. $\square$

4.3 Der Satz von Tonelli

Mit dem gerade bewiesenen Kriterium für die Unterhalbstetigkeit von F können wir jetzt wie zu Beginn des Kapitels skizziert die direkte Methode der Variationsrechnung anwenden. Das Hauptergebnis ist im folgenden Existenzsatz zusammengefasst:

Theorem 4.2 (Satz von Tonelli) *Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $1 < q < \infty$ und $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^M$ gegeben. Ferner gelte*

(1) $f,\ \frac{\partial f}{\partial p} \in C^0([a,b] \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$.

(2) Es gibt Konstanten $c_0 > 0$, $c_1 \geq 0$ mit

$$c_0 |p|^q - c_1 \leq f(x,z,p) \qquad \textit{für alle } (x,z,p) \in [a,b] \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M.$$

(3) Für alle $(x,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^M$ ist die Abbildung $p \mapsto f(x,z,p)$ konvex.

Dann gibt es eine Funktion u in der Klasse

$$K(\alpha,\beta) := \big\{ v \in H^{1,q}((a,b);\, \mathbb{R}^M) \mid v(a)=\alpha,\ v(b)=\beta \big\}, \tag{4.12}$$

die Minimierer von F in $K(\alpha,\beta)$ ist, d.h.

$$F(u) = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x = \min_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}).$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei $c_1 = 0$, andernfalls betrachten wir die Abbildung $F(u) + (b-a)c_1$ anstelle von $F(u)$.

Als erstes stellen wir fest, dass $K(\alpha,\beta) \neq \emptyset$, da die lineare Funktion

$$Lx := \frac{x-a}{b-a}(\beta-\alpha)+\alpha$$

in $H^{1,q}((a,b);\, \mathbb{R}^M$ liegt und die Randbedingungen $La=\alpha$, $Lb=\beta$ erfüllt.

Weiter existiert eine Minimalfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K(\alpha,\beta)$ mit

$$F(u_k) \to \inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}) \qquad \text{für } k\to\infty.$$

Nach Voraussetzung (2) (mit $c_1=0$) haben wir

$$c_0 \int_a^b |u_k'(x)|^q\,\mathrm{d}x \le F(u_k) \to \inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}) < \infty.$$

Daher ist

$$\|u_k'\|_{L^q((a,b);\,\mathbb{R}^M)} \le c \qquad \text{gleichmäßig in } k. \tag{4.13}$$

Wegen $|u_k(x)| \le |u_k(a)| + |u_k(x)-u_k(a)|$ gilt

$$|u_k(x)|^q \le 2^{q-1}\Big[|\underbrace{u_k(a)}_{=\alpha}|^q + |u_k(x)-u_k(a)|^q\Big].$$

Mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung folgt (wobei c verschiedene, nicht-negative Konstanten bezeichne, die von den Daten, aber nicht von k abhängen dürfen)

$$\begin{aligned}\int_a^b |u_k(x)|^q\,\mathrm{d}x &\le c + c\int_a^b |u_k(x)-u_k(a)|^q\,\mathrm{d}x \\ &\le c\left(1+\int_a^b |u_k'(x)|^q\,\mathrm{d}x\right) \le c.\end{aligned}$$

Damit ist $\|u_k\|_{L^q((a,b);\,\mathbb{R}^M)}$ gleichmäßig beschränkt, insgesamt mit (4.13) ist also $\|u_k\|_{H^{1,q}((a,b);\,\mathbb{R}^M)}$ gleichmäßig beschränkt. Nach Voraussetzung gilt $1<q<\infty$, also ist $H^{1,q}((a,b);\,\mathbb{R}^M)$ ein reflexiver Banachraum. Daher existiert eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $H^{1,q}((a,b);\,\mathbb{R}^M)$ für $j\to\infty$. Nach dem Sobolev-Einbettungssatz ist $H^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, also ist

$$\|u_k\|_{C^{0,1-1/q}([a,b];\,\mathbb{R}^M)} \le c \qquad \text{gleichmäßig in } k.$$

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli existiert eine Teilfolge, die wir wieder $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ nennen, mit

$$u_{k_j} \to u \qquad \text{in } C^0([a,b];\ \mathbb{R}^M).$$

Damit erfüllt u dann auch die Randbedingungen, da

$$u(a) = \lim_{j\to\infty} u_{k_j}(a) = \alpha, \qquad u(b) = \lim_{j\to\infty} u_{k_j}(b) = \beta,$$

insgesamt also $u \in K(\alpha,\beta)$. Schließlich garantiert Satz 4.1 die schwache Unterhalbstetigkeit von F, und wie zu Beginn des Kapitels ausgeführt ergibt sich daraus

$$F(u) = \inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}). \quad \square$$

Bemerkungen:

(1) Anstelle der Menge $K(\alpha,\beta)$ aus (4.12) ist auch die folgende Wahl möglich, die jeweils garantiert, dass die Poincaré-Ungleichung gültig ist:

$$\begin{aligned}
\overline{K} &= \left\{ v \in H^{1,q}((a,b);\ \mathbb{R}^M) \;\middle|\; \frac{1}{|b-a|}\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\},\\
K(\alpha) &= \left\{ v \in H^{1,q}((a,b);\ \mathbb{R}^M) \;\middle|\; v(a) = \alpha \right\},\\
K(\beta) &= \left\{ v \in H^{1,q}((a,b);\ \mathbb{R}^M) \;\middle|\; v(b) = \beta \right\},\\
K(\overline{x}) &= \left\{ v \in H^{1,q}((a,b);\ \mathbb{R}^M) \;\middle|\; v(\overline{x}) = 0 \right\},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Fall $\overline{x} \in [a,b]$ ein fest gewählter Punkt ist.

(2) Anstelle der Voraussetzung (1) in Satz 4.2 genügt es zu fordern, dass f eine Carathéodory-Funktion ist (man vergleiche mit den Voraussetzungen von Lemma 4.1). Die Voraussetzungen (2) und (3) von Satz 4.2 müssen dann jeweils nur für fast alle $x \in (a,b)$ gelten.

(3) Die Voraussetzung (3) von Satz 4.2 kann durch das folgende *superlineare Wachstumsverhalten* ersetzt werden:

$$f(x,z,p) \geq g(p) \geq 0$$

mit einer Funktion $g(p)$, für die gilt

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{g(p)}{|p|} = \infty \qquad \text{für alle } (x,z) \in [a,b]\times\mathbb{R}^M.$$

Um den Beweis von Satz 4.2 mit dieser geänderten Voraussetzung zu führen, benötigt man dann jedoch ein Kompaktheitsresultat bezüglich schwacher Konvergenz für den nicht-reflexiven Banachraum $H^{1,1}((a,b);\ \mathbb{R}^M)$, siehe [5, Theoreme 3.7 und 2.12].

4.4 Anwendungen

Wir geben einige Anwendungen für Satz 4.2 an und diskutieren Fälle, in denen einige seiner Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

Beispiel 1: Sei $1 < q < \infty$ gegeben und

$$F(v) := \int_a^b |v'(x)|^q \, \mathrm{d}x$$

zu minimieren in der Klasse

$$K(\alpha, \beta) := \{v \in H^{1,q}((a,b); \mathbb{R}^M) \mid v(0) = \alpha,\ v(1) = \beta\}.$$

Man verifiziert leicht, dass F die Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllt. Also existiert $u \in K(\alpha, \beta)$ mit

$$F(u) = \inf_{\tilde{u} \in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}).$$

Analog existieren für $N \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Minimierer des Funktionals

$$F(v) := \int_\Omega |\nabla v(x)|^q \, \mathrm{d}x.$$

Für $q = 2$ heißen die Minimierer *harmonische Abbildungen*, im allgemeinen Fall *q-harmonische Abbildungen*.

Beispiel 2 (Weierstraß): Sei $(a, b) = (0, 1)$ und α, $\beta \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Für

$$F(v) := \int_0^1 x^2 |v'(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

betrachten wir das Optimierungsproblem

$$F(v) \to \min$$

in der Klasse

$$K(\alpha, \beta) := \{v \in H^{1,2}((0,1); \mathbb{R}) \mid v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}.$$

Für dieses Beispiel ist Voraussetzung (3) von Satz 4.2 nicht erfüllt.

Wir zeigen durch Widerspruch, dass für $\alpha \neq \beta$ kein Minimierer zu obigem Problem existiert.

Beweis: Es gilt $F(v) \geq 0$ und für die Folge

$$u_k(x) := \alpha + (\beta - \alpha) \frac{\arctan(kx)}{\arctan(k)}, \qquad x \in (0, 1)$$

gilt $u_k(0) = \alpha$, $u_k(1) = \beta$, also $u_k \in K(\alpha, \beta)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} F(u_k) &= \int_0^1 x^2 |u_k'(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \frac{k^2}{(1 + k^2x^2)^2} \frac{(\beta - \alpha)^2}{(\arctan k)^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{(\arctan k)^2} \int_0^1 \frac{k^2 x^2}{(1 + k^2 x^2)^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{(\arctan k)^2} \Big[\frac{1}{2k} \Big(\arctan k - \frac{k}{1 + k^2} \Big) \Big] \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty. \end{aligned}$$

Daher gilt $\inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}) = 0$. Nach Annahme existiert ein Minimierer u, also $F(u) = 0$. Dieser Minimierer erfüllt nach Definition von F

$$u'(x) = 0 \qquad \text{für fast alle } x \in (0,1).$$

Damit dann $u = \text{const}$ auf $(0,1)$, im Widerspruch zu $\alpha \neq \beta$. $\square$

Bemerkung: Man kann jedoch zeigen, dass für $1 < q < \infty$ und $\sigma \leq 0$ das Problem

$$F(v) := \int_0^1 x^\sigma |v'(x)|^q \,\mathrm{d}x$$

einen Optimierer in der Klasse

$$K(\alpha,\beta) := \{v \in H^{1,q}((0,1);\mathbb{R}) \mid v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}$$

besitzt.

Beispiel 3: Sei $(a,b) = (0,1)$. Wir betrachten das Optimierungs-Problem

$$F(v) := \int_0^1 \Big[(1 - |v'(x)|^2)2 + v(x)^2\Big] \,\mathrm{d}x \to \min$$

auf

$$K = K(0,0) = \big\{v \in H^{1,4}((0,1);\mathbb{R}) \;\big|\; v(0) = v(1) = 0\big\}.$$

Wir bemerken, dass $f(z,p) = (1-p^2)^2 + z^2$ keine konvexe Funktion in p ist, da

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p}(z,p) &= (-2p)2(1-p) = -4(p-p^3), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(z,p) &= -4 + 12p^2 \end{aligned}$$

also $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} < 0$ für $|p| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Daher ist Voraussetzung (3) von Satz 4.2 nicht erfüllt. Wir werden zeigen, dass tatsächlich keine Lösung zum betrachteten Minimierungs-Problem existiert.

Aufgrund der Form des Integranden werden Funktionen u mit $u'(x) \in \{-1,+1\}$ bevorzugt. Diese Situation ist typisch für das Auftreten von *Mikrostruktur* in Festkörpern. Eine mathematisch präzise anwendungsbezogene Einführung in diesen Themenkomplex ist [4].

Wir setzen die Funktion

$$\hat{u}_0 := \frac{1}{2} - \Big|x - \frac{1}{2}\Big|, \qquad x \in [0,1]$$

periodisch zu einer Funktion u_0 auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Da $\hat{u}_0$ Lipschitz-stetig ist, gilt $u_0 \in C^{0,1}(\mathbb{R}) \sim H^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Wir definieren

$$u_k(x) := \frac{1}{k} u_0(kx) \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $u_k'(x) = u_0'(kx)$ und $u_k'(x) \in \{-1,+1\}$ für fast alle $x \in (0,1)$. Außerdem gilt $u_k(0) = u_k(1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K \cap H^{1,\infty}((a,b);\mathbb{R}).$$

Einsetzen liefert

$$F(u_k) = \int_0^1 u_k(x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k^2} \int_0^1 u_0(kx)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Substituieren wir $z := kx$, so folgt aufgrund der Periodizität von u_0

$$\begin{aligned} F(u_k) &= \frac{1}{k^3} \int_0^k u_0(z)^2 \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{k^2} \int_0^1 u_0(z)^2 \, \mathrm{d}z \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty. \end{aligned}$$

Wegen $F \geq 0$ zeigt dies

$$\inf_{\tilde{u} \in K} F(\tilde{u}) = 0.$$

Ist also u ein Minimierer des untersuchten Variationsproblems, so müsste

$$\int_0^1 u(x)^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

gelten, also $u = 0$ fast überall auf $(0,1)$. Wegen $u \in H^{1,4}((0,1); \mathbb{R}) \subset C^{0,1-1/4}([0,1])$ nach Einbettungs-Sätzen müsste also auch $u(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ gelten. Damit ist dann $u' = 0$ auf $(0,1)$ und

$$F(u) = \int_0^1 (1 - |u'(x)|^2)^2 \, \mathrm{d}x = 1,$$

ein Widerspruch. $\square$

Beispiel 4: Wir modifizieren das Beispiel 3 geringfügig und setzen (wieder für $(a,b) = (0,1)$ und gegebene α, $\beta \in \mathbb{R}$)

$$F(v) := \int_0^1 \Big[\big(1 - |v'(x)|^2\big)^2 + v(x) \Big] \, \mathrm{d}x \to \min$$

auf

$$K(\alpha, \beta) := \big\{ v \in H^{1,4}((0,1); \mathbb{R}) \;\big|\; v(0) = \alpha, \, v(1) = \beta \big\}.$$

Wir werden zeigen, dass dieses Minimierungs-Problem eine Lösung besitzt, obwohl wie bereits in Beispiel 3 der Integrand $p \mapsto f(x,z,p)$ nicht konvex ist. Zur Umgehung der Nicht-Konvexität von f betrachten wir die *konvexe Hülle* f^{**} von $f(p) := (1-p^2)^2$, d.h. das punktweise Supremum aller in p konvexen Funktionen mit Werten unterhalb von $f(p)$. Hier gilt explizit

$$f^{**}(p) = \begin{cases} (1-p^2)^2 & \text{für } |p| > 1, \\ 0 & \text{für } |p| \leq 1. \end{cases}$$

Zunächst betrachten wir das konvexifizierte Variationsproblem

$$G(v) := \int_0^1 \Big(f^{**}(v'(x)) + v(x) \Big) \, \mathrm{d}x \to \min$$

in $K(\alpha, \beta)$. Dabei tritt folgende Schwierigkeit auf: Der Integrand

$$g(x, z, p) := f^{**}(p) + z$$

des Funktionals G erfüllt nicht die Wachstumsbedingung (2) aus Satz 4.2. Stattdessen kann man die Beschränktheit von v in $H^{1,4}(0,1)$ wie folgt nachweisen:

Es gilt

$$(1 - p^2)^2 = 1 - 2p^2 + p^4 > \frac{1}{2} p^4 \qquad \text{für } p^2 > 4. \tag{4.14}$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$, $v \in K(\alpha, \beta)$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |v'(x)|^4 \, \mathrm{d}x &= \int_{(0,1)\cap\{|v'|^2>4\}} |v'(x)|^4 \, \mathrm{d}x + \int_{(0,1)\cap\{|v'|^2\leq 4\}} |v'(x)|^4 \, \mathrm{d}x \\ &\leq 2 \int_{(0,1)\cap\{|v'|^2>4\}} (1 - |v'(x)|^2)^2 \, \mathrm{d}x + 16 \\ &\leq 2G(v) - 2 \int_0^1 v(x) \, \mathrm{d}x + 16. \end{aligned}$$

Dabei wurde in der 2. Zeile zur Abschätzung des 1. Integrals rechts (4.14) verwendet. Schätzen wir den 2. Ausdruck rechts mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung ab, so folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |v'(x)|^4 \, \mathrm{d}x &\leq 2G(v) + 2\mathcal{L}^1\{(0,1)\}^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^1 |v(x)|^4 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{4}} + 16 \\ &\leq 2G(v) + c\|v'\|_{L^4(0,1)} + 16 \\ &\leq 2G(v) + \varepsilon \|v'\|^4_{L^4(0,1)} + C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Dabei wurde zum Erreichen der vorletzten Zeile die Poincaré-Ungleichung verwendet, die letzte Zeile ergibt sich mit der Youngschen Ungleichung, wobei C_ε eine positive Konstante ist mit $C_\varepsilon \to \infty$ für $\varepsilon \searrow 0$.

Mit der Wahl $\varepsilon = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\frac{1}{2} \|v'\|^4_{L^4(0,1)} < 2G(v) + c. \tag{4.15}$$

Betrachten wir eine Minimalfolge des Funktionals G, also

$$G(v_k) \to \inf_{\tilde{v} \in K(\alpha,\beta)} G(\tilde{v}) < \infty,$$

so ist $(|G(v_k)|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, also ist auch nach (4.15) $\|v_k'\|_{L^4(0,1)}$ beschränkt, wieder nach der Poincaré-Ungleichung also

$$\|v_k\|_{H^{1,4}(0,1)} \leq c.$$

Nach Satz 3.8 und Einbettungssatz existiert ein $u \in H^{1,4}(0,1)$ und eine Teilfolge $(v_{k_i})_{i\in\mathbb{N}} \subset (v_k)$ mit $v_{k_i} \rightharpoonup u$ in $H^{1,4}(0,1)$ und $v_{k_i} \to u$ in $C^0([0,1])$. Nach Satz 4.1 ist der Anteil $\int_0^1 f^{**}(v'(x))\,\mathrm{d}x$ schwach unterhalbstetig, der lineare Anteil von G ist natürlich schwach stetig, insgesamt ist also G schwach unterhalbstetig. Daher gilt

$$G(u) = \inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} G(\tilde{u}),$$

und $u \in K(\alpha,\beta)$, da $v_{k_i} \to u$ in $C^0([0,1])$.

Wie man durch Betrachtung der 1. Variation und nach einmaliger partieller Integration feststellt, gilt

$$\int_0^1 (f^{**})'(u'(x) - x)\eta'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty((0,1);\mathbb{R}).$$

Nach dem Fundamental-Lemma von du Bois-Reymond existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$(f^{**})'(u'(x)) - x = c \qquad \text{für fast alle } x \in (0,1). \tag{4.16}$$

Nach Definition von f^{**} gilt $(f^{**})'(p) = 0$ für $|p| \leq 1$. Um (4.16) zu erfüllen, muss also $|u'(x)| > 1$ gelten für fast alle $x \in (0,1)$.

Wegen $f^{**}(p) + z \leq (1-p^2)^2 + z = f(z,p)$ gilt

$$\begin{aligned}\inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}) \leq F(u) &= \int_0^1 f^{**}(u'(x)) + u(x)\,\mathrm{d}x \\ &= G(u) = \inf_{\tilde{v}\in K(\alpha,\beta)} G(v) \leq \inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}),\end{aligned}$$

also

$$F(u) = \inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}).$$

<u>Eindeutigkeit von u:</u>

Annahme: $\exists v \in K(\alpha,\beta)$, $v \neq u$, mit $F(v) = F(u) = \inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u})$. Dann gilt

$$\inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}) = F(v) \geq G(v) \geq G(u) = \inf_{\tilde{v}\in K(\alpha,\beta)} G(\tilde{v}) = F(u) = \inf_{\tilde{u}\in K(\alpha,\beta)} F(\tilde{u}).$$

Somit

$$G(v) = \inf_{\tilde{v}\in K(\alpha,\beta)} G(\tilde{v}),$$

und aus (4.16) folgt wieder $|v'(x)| > 1$ für fast alle $x \in (0,1)$.

Für $|p| > 1$ ist $f^{**}(p)$ strikt konvex, also gilt für $0 < \lambda < 1$

$$\lambda f^{**}(v'(x)) + (1-\lambda) f^{**}(u'(x)) > f^{**}(\lambda v'(x) + (1-\lambda)u'(x))$$

für fast alle $x \in (0,1)$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\lambda G(v) + (1-\lambda)G(u) &= \lambda \int_0^1 f^{**}(v'(x))\,\mathrm{d}x + \lambda \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad +(1-\lambda) \int_0^1 f^{**}(u'(x))\,\mathrm{d}x + (1-\lambda) \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x \\
&> \int_0^1 f^{**}(\lambda v'(x) + (1-\lambda)u'(x))\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^1 \lambda v(x) + (1-\lambda)u(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = G(\lambda v + (1-\lambda)u).
\end{aligned}
$$

Mit der Wahl $\lambda = \frac{1}{2}$ folgt wegen $\frac{1}{2}(u+v) \in K(\alpha, \beta)$

$$
G(u) = \frac{1}{2}\big(G(u) + G(v)\big) > G\Big(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\Big) \geq G(u),
$$

ein Widerspruch. $\square$

In [3] wird die im letzten Beispiel angewandte Technik der Konvexifizierung des Integranden weitergehend studiert.

Kapitel 5

Funktionale vektorwertiger Abbildungen

5.1 Formulierung des Variations-Problems

In diesem abschließenden Kapitel studieren wir die folgende Situation. Es bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet. Sei

$$u : \Omega \to \mathbb{R}^M$$

und $M > 1$ (der Fall $M = 1$ wurde für $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ in Kapitel 4 behandelt). Wir betrachten das Funktional

$$F(u) := \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\,\mathrm{d}x$$

und untersuchen das Optimierungs-Problem

$$F(u) \to \min \qquad \text{für } u \in K \tag{5.1}$$

für eine abgeschlossene, nichtleere Menge

$$K \subset H^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^M).$$

Die Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung auf dieses Problem ist im Prinzip genauso wie in Kapitel 4 möglich. Allerdings ist der Nachweis der Unterhalbstetigkeit von F bezüglich der schwachen Konvergenz in $H^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ im Fall einer vektorwertigen Abbildung u, d.h. für $M > 1$, viel schwieriger als im skalaren Fall. Nachfolgend konzentrieren wir uns auf dieses Problem.

Da für $M > 1$ das 3. Argument von f eine Matrix ist, schreiben wir in diesem Kapitel

$$f = f(x, z, P)$$

für $x \in \Omega$, $z = u(x) \in \mathbb{R}^M$ und die Jacobi-Matrix

$$P = Du = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_M}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_M}{\partial x_N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times N}.$$

5.2 Verschiedene Konvexitäts-Begriffe

Wir wiederholen zunächst den Begriff der Quasi-Konvexität, der schon für den skalaren Fall in Kapitel 4 eingeführt wurde.

Definition: Eine Funktion $f(x,z,P) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN} \to \mathbb{R}$ heißt *quasikonvex*, falls für alle $(\overline{x}, \overline{z}, \overline{P}) \in \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN}$ gilt

$$\fint_\Omega f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{P} + D\varphi(x))\,\mathrm{d}x \geq f(\overline{x}, \overline{z}, \overline{P}) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M).$$

Dabei haben wir aus Gründen, die später klar werden (i.b. bei der Definition der Polykonvexität unten) den Raum der Matrizen $R^{M \times N}$ mit R^{MN} identifiziert.

Es gilt: Erfüllt f bestimmte Wachstumsbedingungen (siehe (5.4)), so ist F unterhalbstetig bezüglich der schwachen Topologie in $H^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ genau dann, wenn f quasikonvex ist. Dabei ergibt sich die Hinrichtung aus Lemma 4.2 und die Rückrichtung aus Theorem 5.1 unten.

Definition: Eine Funktion $f(x,z,P) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN} \to \mathbb{R}$ heißt *rang1-konvex*, falls für alle $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^M$ und für alle P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^{MN}$ gilt

$$f(x,z,\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2) \leq \lambda f(x,z,P_1) + (1-\lambda) f(x,z,P_2) \qquad \forall 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{5.2}$$

Bemerkung: In Tensor-Notation kann die Definition (5.2) umgeschrieben werden. Seien $a = (a_1, \ldots, a_M) \in \mathbb{R}^M$, $b = (b_1, \ldots, b_N)$ zwei Vektoren und

$$a \otimes b := (a_i b_j)_{1 \leq i \leq M,\, 1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

das *Tensorprodukt* von a und b. Dann kann (5.2) auch wie folgt formuliert werden: f ist rang1-konvex, falls die Abbildung g, gegeben durch

$$g(t) := f(P + ta \otimes b),$$

konvex ist für alle $t \in \mathbb{R}$, alle $P \in \mathbb{R}^{MN}$ und alle $a \in \mathbb{R}^M$, $b \in \mathbb{R}^N$.

Definition: Für $P \in \mathbb{R}^{MN}$ definieren wir die natürliche Zahl

$$\tau(M,N) := \sum_{s=1}^{\min\{M,\,N\}} \sigma(s),$$

wobei

$$\sigma(s) := \begin{pmatrix} M \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ s \end{pmatrix} = \frac{M!N!}{(s!)^2 (M-s)!(N-s)!}.$$

So erhalten wir etwa für $M = N = 2$ die Werte $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 1$, also $\tau(2,2) = 5$.

Für $2 \leq s \leq \min\{M,\,N\}$ sei $\mathrm{adj}_s(P)$ die zu P *adjugierte Matrix* der Ordnung s. Die formale Definition von $\mathrm{adj}_s(P)$ soll hier für allgemeines M und N aus Zeitgründen nicht gegeben werden, findet sich jedoch in [6, S. 187ff.].

Wir geben stattdessen einige Beispiele an.

(a) $N = M = 2$. Dann ist

$$P = \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

und $\mathrm{adj}_2(P) = \det(P)$.

(b) $N = M = 3$. Es gilt

$$P = \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 \\ P_1^2 & P_2^2 & P_3^2 \\ P_1^3 & P_2^3 & P_3^3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\operatorname{adj}_2(P) = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} P_2^2 & P_3^2 \\ P_2^3 & P_3^3 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} P_1^2 & P_3^2 \\ P_1^3 & P_3^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} P_1^2 & P_2^2 \\ P_1^3 & P_2^3 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} P_2^1 & P_3^1 \\ P_2^3 & P_3^3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} P_1^1 & P_3^1 \\ P_1^3 & P_3^3 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^3 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} P_2^1 & P_3^1 \\ P_2^2 & P_3^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} P_1^1 & P_3^1 \\ P_1^2 & P_3^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente von $\operatorname{adj}_2(P)$ sind die sogenannten *Co-Faktoren* von P. Weiter gilt

$$\operatorname{adj}_3(P) = \det(P).$$

Definition: Eine Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt *polykonvex*, falls eine im 3. Argument konvexe Funktion $g : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ existiert mit

$$f(x, z, P) = g(T(P)),$$

wobei

$$T(P) := (P, \operatorname{adj}_2(P), \ldots, \operatorname{adj}_{\min\{M,N\}}(P)).$$

Bemerkung: In der Definition der Polykonvexität einer gegebenen Funktion f ist g im allgemeinen nicht eindeutig. Sei dazu exemplarisch $M = N = 2$ und (für P gegeben durch (5.3))

$$\begin{aligned} f(x,z,P) \;:=\; f(P) &= |P|^2 = (P_1^1)^2 + (P_1^2)^2 + (P_2^1)^2 + (P_2^2)^2 \\ &= (P_1^1 - P_2^2)^2 + (P_2^1 + P_1^2)^2 + 2\det(P). \end{aligned}$$

Also definieren wir $g_1,\, g_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g_1(P,p) &:= |P|^2, \\ g_2(P,p) &:= (P_1^1 - P_2^2)^2 + (P_2^1 + P_1^2)^2 + 2p. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $g_1 \neq g_2$ und $g_1,\, g_2$ sind konvex.

5.3 Anwendung auf Variations-Probleme

Theorem 5.1 (Unterhalbstetigkeit und Quasikonvexität) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und $f = f(x,z,P) : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion, quasikonvex, und erfülle für $1 < q < \infty$ und für alle $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^M$ die Wachstumsbedingung*

$$-\alpha\big(1 + |P|^{\tilde{q}}\big) \leq f(x,z,P) \leq \alpha\big(1 + |P|^q\big) \qquad \forall P \in \mathbb{R}^{MN}, \tag{5.4}$$

wobei $\alpha \geq 0$ und $1 \leq q < \tilde{q}$. Dann ist

$$F(u) := \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\,\mathrm{d}x$$

schwach unterhalbstetig in $H^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^M)$.

Beweis: Für $f = f(P)$ findet sich der Beweis in [6, Theorem 2.3 aus Kapitel 4].

Nach Theorem 5.1 ist also die Quasikonvexität des Integranden die entscheidende Eigenschaft bei der Untersuchung von Variationsproblemen für vektorwertige u.

Problem: Die Quasikonvexität von f lässt sich in der Praxis nur schwer nachrechnen. Daher werden oftmals hinreichende Kriterien untersucht.

Theorem 5.2 (Zusammenhang der Konvexitäts-Begriffe) *Sei* $f = f(P) : \mathbb{R}^{MN} \to \mathbb{R}$ *gegeben.*

(i) Es gelten die Implikationen

$$f \text{ konvex} \Rightarrow f \text{ polykonvex} \Rightarrow f \text{ quasikonvex} \Rightarrow f \text{ rang1-konvex.}$$

(ii) Für $M = N = 1$ *sind die Konvexitäts-Begriffe alle äquivalent. Andernfalls sind die Umkehrungen der Implikationen in (i) im allgemeinen falsch.*

(iii) Für $f \in C^2(\mathbb{R}^{MN})$ *ist die rang1-Konvexität äquivalent mit der* Legendre-Hadamard-Bedingung *(oder Elliptizitäts-Bedingung)*

$$\sum_{i,j=1}^{M} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial P_\alpha^i \partial P_\beta^j} \lambda_i \lambda_j \mu_\alpha \mu_\beta \geq 0$$

für alle $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \in \mathbb{R}^M$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N) \in \mathbb{R}^N$, *und alle*

$$P = (P_\alpha^i)_{1 \leq i \leq M,\, 1 \leq \alpha \leq N} \in \mathbb{R}^{MN}.$$

(iv) Ist $f = f(P) : \mathbb{R}^{MN} \to \mathbb{R}$ *konvex, polykonvex, quasikonvex oder rang1-konvex, so ist* f *lokal Lipschitzstetig.*

Beweis Kapitel 4, Theorem 1.1 aus [6].

Dass die Umkehrungen der Implikationen in Theorem 5.2 (i) nicht gelten, beweist man anhand von Beispielen, etwa einer rang1-konvexen Funktion, die nicht quasikonvex ist. Diese finden sich etwa in [3].

Wie wir sehen, ist die Variationsrechnung auch nach über 300 Jahren noch nicht am Ende angekommen und wird noch immer weiter entwickelt. So fehlt etwa noch immer ein tieferes Verständnis der lokalen Eigenschaften quasikonvexer Funktionen oder effektive Berechnungsmethoden für die quasikonvexe Hülle eines gegebenen Integranden. Für maßwertige Integranden ist die Theorie noch unvollkommen entwickelt.

Anhang A

Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie

Die wesentlichen Aussagen dieses Anhangs sind [15] entnommen.

A.1 Wiederholung des Riemann-Integrals

Wir wiederholen zunächst das Riemann-Integral, weil wir später auch die Unterschiede zur Lebesgue-Integration herausarbeiten wollen.

Gegeben sei ein beschränktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung sei $f \geq 0$. Zu berechnen ist die von f und der x-Achse eingeschlossene Fläche

$$S(f) := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\Big\}.$$

Dazu betrachten wir eine *Partition*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

von $[a, b]$ und setzen

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \qquad M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

Wir approximieren $S(f)$ durch *Untersummen* $L(P, f)$ und *Obersummen* $U(P, f)$

$$L(P, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \qquad U(P, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Seien P_1, P_2 Partitionen mit $P_1 \subset P_2$, d.h. P_2 ist Verfeinerung von P_1. Dann gilt

$$L(P_1, f) \leq L(P_2, f) \leq U(P_2, f) \leq U(P_1, f).$$

Man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} \alpha &:= \sup\Big\{L(P, f) \;\Big|\; P \text{ Partition von } [a, b]\Big\}, \\ \beta &:= \inf\Big\{U(P, f) \;\Big|\; P \text{ Partition von } [a, b]\Big\} \end{aligned}$$

existieren und dass gilt $\alpha \leq \beta$.

Falls $\alpha = \beta$, so definieren wir das *Riemann-Integral* von f durch

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \alpha(=\beta).$$

Beispiel: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht liegt, gilt für jede Partition P

$$U(P,f) = 1, \qquad L(P,f) = 0.$$

Es folgt $0 = \alpha < \beta = 1$, d.h. f ist *nicht* Riemann-integrierbar. $\square$

Definition Mit $R[a,b]$ definieren wir den *Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen* auf $[a,b]$. Das Riemann-Integral ist ein lineares, monotones Funktional auf $R[a,b]$, denn

$$\int\limits_a^b \big(\alpha f + \beta g\big)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$f \leq g \text{ auf } [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R[a,b]$ eine Folge, die *punktweise* gegen eine Funktion $f \in R[a,b]$ konvergiert, d.h.

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \text{für jedes } x \in [a,b].$$

Dann gilt i.a. *nicht*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Als Beispiel betrachten wir auf $[0,1]$ die Funktionenfolge

$$f_n(x) := ne^{-nx} \qquad \text{für } n = 1,2,3,\ldots.$$

Es gilt $f_n(x) \to 0 =: f(x)$ für $x \in (0,1]$. Der Ausnahme-Punkt $x = 0$ spielt für die Integration keine Rolle. Die Folge f_n ist Riemann-integrierbar und

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 ne^{-nx}\,\mathrm{d}x = \Big[-e^{-nx}\Big]_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-n} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Andererseits gilt

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \quad \square$$

Theorem A.1 *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R[a,b]$ *und* $f_n \to f$ gleichmäßig *auf* $[a,b]$*, d.h.*

$$\|f_n - f\|_{C^0([a,b];\,\mathbb{R})} = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad \textit{für } n \to \infty.$$

Dann gilt $f \in R[a,b]$ *und*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

In obigem Beispiel konvergiert die Funktionenfolge f_n nicht gleichmäßig, da

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(0) = n \not\to \sup_{x\in[0,1]} f(x) = 0.$$

Ähnlich zu Theorem A.1 gilt

Theorem A.2 (Majorisierte Konvergenz für das Riemann-Integral) *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R[a,b]$, $g \in R[a,b]$ *mit* $|f_n(x)| \le |g(x)|$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \qquad \textit{für alle } x \in [a,b].$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Theorem A.2 ist die Entsprechung des berühmten Konvergenz-Satzes von Lebesgue (Theorem A.7) für Riemann-integrierbare Funktionen.

A.2 Lebesgue-Integration

Ziel dieses Abschnitts ist die Einführung des Integrals auf einer Klasse $\mathcal{L}$, die größer ist als $R[a,b]$. Wir schreiben die Unter- und Obersummen aus Abschnitt A.1 als Funktionen: (wie oben sei $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ eine Partition)

$$\begin{aligned}
\varphi_P(x) &:= m_1 \mathcal{X}_{[x_0,x_1]}(x) + \sum_{i=2}^{m} m_i \mathcal{X}_{(x_{i-1},x_i]},\\
\psi_P(x) &:= M_1 \mathcal{X}_{[x_0,x_1]}(x) + \sum_{i=2}^{m} M_i \mathcal{X}_{(x_{i-1},x_i]}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet für eine Menge E

$$\mathcal{X}_E(x) := \begin{cases} 1, & x \in E,\\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* der Menge E. Die Funktion φ_P entspricht der Untersumme, ψ_P der Obersumme von f. Es gilt wie oben

$$\varphi_{P_n}(x) \le \varphi_{P_{n+1}}(x) \le f(x)\psi_{P_{n+1}}(x) \le \psi_{P_n}(x).$$

Definition: Eine Abbildung $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls eine Partition $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ existiert und $\varphi \equiv c_k$ (eine Konstante) auf $[x_k, x_{k+1})$ für $0 \leq k \leq n$. Es gilt dann

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{X}_{I_k}(x), \qquad x \in [a,b],\ I_k = [x_{k-1}, x_k).$$

Allgemeiner können die Intervalle I_k durch disjunkte Mengen A_k ersetzt werden, d.h. für $[a,b] = \cup_{k=1}^{n} A_k$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ nennen wir

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{X}_{A_k}(x), \qquad x \in [a,b] \tag{A.1}$$

ebenfalls eine Treppenfunktion (diese Funktionen heißen auch *einfach*).

Für Treppenfunktionen (A.1) können wir das *elementare Lebesgue-Integral* unmittelbar erklären als

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda := \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda(I_k). \tag{A.2}$$

Hier bezeichnet λ die Längenfunktion für Intervalle, d.h.

$$\lambda([a,b)) := \begin{cases} b-a, & a,b \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & a = -\infty \text{ oder/und } b = +\infty. \end{cases}$$

Die Längenfunktion λ hat die folgenden elementaren Eigenschaften:

- λ ist *endlich additiv*, d.h.

  $$\lambda(I) = \lambda(J_1) + \lambda(J_2) \qquad \text{für } I = J_1 \cup J_2,\ J_1 \cap J_2 = \emptyset.$$

- λ ist *abzählbar additiv*, d.h.

  $$\lambda(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)$$

  für $I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ und I_n paarweise disjunkt.

- λ ist *abzählbar subadditiv*, d.h.

  $$\lambda(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)$$

  für $I \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$.

- λ ist *translationsinvariant*, d.h.

  $$\lambda(I + v) = \lambda(I),$$

  wobei z.B. $[a,b] + v := [a+v, b+v]$.

Die Definition (A.2) impliziert, dass für eine Verallgemeinerung des Lebesgue-Integrals die Abbildung λ auf einer größeren Klasse von Teilmengen erklärt sein muss. Zu diesem Zweck benötigen wir einige Definitionen.

Definition: Sei $S \neq \emptyset$. Ein System von Mengen $\mathcal{B} \subset \mathrm{Pot}(S)$ heißt *Algebra*, falls gilt:

(i) $\emptyset$, $S \subset \mathcal{B}$,

(ii) Für A, $B \in \mathcal{B}$ ist $A \cap B \in \mathcal{B}$.

(iii) Für $A \in \mathcal{B}$ ist auch das *Komplement* $A^c := (S \setminus A) \in \mathcal{B}$.

Aus (iii) folgt, dass auch $(A \cup B), (A \triangle B) \in \mathcal{B}$, wobei

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die *symmetrisierte Differenz* der Mengen A und B ist.

Dabei ist $\mathrm{Pot}(S)$ die Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von S.

Definition: Sei $S \neq \emptyset$. Ein System von Mengen $\mathcal{B} \subset \mathrm{Pot}(S)$ heißt σ-*Algebra*, falls gilt:

(i) $\emptyset$, $S \subset \mathcal{B}$,

(ii) Für $A \in \mathcal{B}$ ist auch das Komplement $A^c \in \mathcal{B}$.

(iii) Seien $A_i \in \mathcal{B}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

Speziell für das Lebesgue-Maß betrachten wir die Algebra

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) := \left\{ E \subset \mathbb{R} \;\middle|\; E = \bigcup_{k=1}^{n} I_k,\ I_k \in \mathcal{I} \text{ paarweise disjunkt} \right\}.$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{I}$ die Menge der beschränkten Intervalle auf $\mathbb{R}$.

Definition: Eine Mengenfunktion μ ist ein *Maß* auf $\mathcal{B}$, falls gilt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(E) \geq 0$ für alle $E \subset \mathcal{B}$.

(iii) μ ist σ-*additiv* , d.h.

$$\mu\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \Big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$$

für $E_i \in \mathcal{B}$ paarweise disjunkt.

Dabei wird λ zunächst wie folgt von $\mathcal{I}$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ fortgesetzt:

Sei $E = \cup_{k=1}^{n} I_k$ für paarweise disjunkte Intervalle I_k. Wir definieren die Fortsetzung $\hat{\lambda}$ von λ auf $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ durch

$$\hat{\lambda}(E) := \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k).$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}(\mathcal{I})$ und $\hat{\lambda}(E) = \lambda(E)$ für $E \subset \mathcal{I}$.

Fortsetzung einer Algebra zu einer σ-Algebra:

Sei $S \neq \emptyset$. Die von S erzeugte σ-Algebra ist

$$\sigma(S) := \bigcap_{S \subset C,\, C \text{ ist } \sigma-\text{Algebra}} C.$$

Also ist $\sigma(S)$ die kleinste σ-Algebra, die S enthält.

Ein Maß μ auf einer Algebra $\mathcal{B}$ kann zu einem Maß μ^* auf $\mathcal{B}^* := \sigma(\mathcal{B})$ fortgesetzt werden. Dies ist für das Lebesgue-Maß z.B. in [15][Kapitel 3.7-3.9] erklärt.

Für die Konstruktion benutzt man i.b. das *äußere Maß* zu einem gegebenen Maß μ auf einer Algebra $\mathcal{B}$,

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \,\middle|\, A_i \in \mathcal{B},\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \right\}.$$

Obwohl das so definierte äußere Maß μ^* auf der gesamten Potenzmenge $\mathrm{Pot}(S)$ erklärt ist, ist es nicht einmal endlich additiv, so dass es auf eine kleinere Menge eingeschränkt werden muss.

Es gilt folgender Satz, siehe [15][Prop. 3.9.9].

Theorem A.3 *Sei $\mathcal{B}$ eine Algebra von Teilmengen von S, μ ein Maß auf $\mathcal{B}$. Dann existiert eine σ-Algebra $\mathcal{B}^* := \sigma(\mathcal{B})$ und ein Maß $\mu^* : \mathcal{B}^* \to [0, \infty]$, so dass $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$ und*

$$\mu^*(B) = \mu(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Man kann zeigen, dass die Fortsetzung eindeutig ist. Speziell nennt man $\mathcal{B}* := \sigma(\mathcal{F}(\mathcal{I}))$ die *Borelmengen* auf $\mathbb{R}$ und die Fortsetzung von λ auf $\mathcal{B}^*$ das *Lebesgue-Maß* .

Fortsetzung als Vervollständigung:

Sei $X = \{f = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{X}_{E_i}\}$ der Raum der Treppenfunktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und

$$\int_S f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i)$$

mit der Norm $\|f\|_X := \int_S |f| \,\mathrm{d}\mu$.

Für zwei Funktionen f und g schreiben wir $f = g$ *μ-fast überall*, wenn eine Menge $N \subset S$ existiert mit $\mu(N) = 0$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in S \setminus N$.

Man vervollständigt X zu $\tilde{X}$=Menge aller Cauchy-Folgen in X, d.h.

$$L(\mu; \mathbb{R}) := \left\{ f : S \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \tilde{X} \text{ mit } f = \lim_{k \to \infty} f_k \ \ \mu\text{-fast überall} \right\}.$$

Statt $L(\mu; \mathbb{R})$ schreiben wir nachfolgend $L^1(\mu)$.

Die folgende Bemerkung ist instruktiv, denn sie zeigt, dass es nicht möglich ist, ein additives Maß auf *allen* Teilmengen des $\mathbb{R}$ zu definieren. Dies erklärt, warum der oben skizzierte Weg der Fortsetzung eines Maßes von einer Algebra zu einer σ-Algebra erforderlich ist.

Bemerkung: $\mathcal{B} \neq \mathrm{Pot}(S)$ ist wesentlich!

Dazu (vgl. [15, Theorem 3.4.1]):

Theorem A.4 (Ulam) *Sei μ ein Maß, definiert auf* $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ *derart, dass*

- $\mu((n, n+1]) < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$
- $\mu(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

Dann gilt

$$\mu(E) = 0 \qquad \forall E \subset \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Obwohl also das Lebesgue-Maß nicht auf alle Teilmengen des $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^N$) fortgesetzt werden kann, können nicht-Lebesgue-messbare Mengen nicht explizit angegeben werden! Man benötigt eine rekursive Vorschrift, z.B. durch vollständige Induktion, zur Konstruktion einer Nicht-Borelmenge.

Der folgende Satz erlaubt in vielen Fällen die Berechnung des Lebesgue-Integrals.

Theorem A.5 *Sei $f \in R[a,b]$ für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt $f \in L^1([a,b])$ und*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\mu = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Bemerkung: Die Beschränktheit des Intervalls ist für die Richtigkeit von Theorem A.5 wesentlich!

Dazu folgendes

Beispiel: Auf $[0, \infty)$ setzen wir

$$f(x) := \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{für } n-1 \le x < n,\ n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Die Funktion f ist beschränkt und Riemann-integrierbar auf jedem beschränkten, abgeschlossenen Teilintervall von $[0, \infty)$. Setzen wir $I_m := [0, m]$ für $m = 1, 2, 3, \ldots$, so gilt

$$\int_{I_m} f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n},$$

also

$$\int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_{I_n} f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Aber $f \notin L^1([0, \infty))$. Denn: Nehmen wir an, dass $f \in L^1([0, \infty))$. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz von Lebesgue A.7 gilt dann wegen

$$|\mathcal{X}_{[0,n]} f| \le |f|,$$

dass $\mathcal{X}_{[0,n]} f \in L^1([0, \infty))$. Damit aber

$$\int_0^\infty |f| \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty |\mathcal{X}_{[0,n]} f| \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Bemerkung: Die obige Konstruktion ist genauso möglich, wenn man mit einem anderen Maß als der Längenfunktion startet.

Als Beispiel sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ und für $B \subset \Omega$ definieren wir das *Zählmaß* durch

$$\mu_{\mathbb{N}}(B) := \#B := \text{'Anzahl der Elemente in } B'.$$

Es wird dann

$$\int_S f(x)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n,$$

wobei wir $f_n := f(n)$ gesetzt haben. Dies motiviert die folgende

Definition: Der *Raum aller reellen Folgen* sei gegeben durch

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in \mathbb{N}\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^N$ setzen wir

$$\begin{aligned} \|x\|_{l^p} &:= \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty, \\ \|x\|_{l^\infty} &:= \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|. \end{aligned}$$

Wir definieren die Folgenräume

$$l^p := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{l^p} < \infty\} = L^p(\mathbb{N}; \mu_{\mathbb{N}}).$$

Diese Räume ergeben sich auch direkt aus $L^p(\Omega; \mu)$, wenn man für μ das Zählmaß einsetzt.

Definition: Die obige Konstruktion des Lebesgue-Maßes lässt sich analog auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen. Dazu betrachten wir Quader im $\mathbb{R}^N$ der Form

$$[a, b) := \left\{x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; a_i \le x < b_i \text{ für } 1 \le i \le N\right\}$$

mit dem Maß

$$\mu([a, b)) := \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i).$$

Definition: Seien $S_i \neq \emptyset$ und $\mathcal{B}_i$ die messbaren Mengen auf S_i für $i = 1, 2$. Wir nennen $f : S_1 \to S_2$ *messbare Funktion*, wenn das Urbild jeder messbaren Menge in S_2 unter f messbar in S_1 ist, in Formeln

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_1 \qquad \forall B \in \mathcal{B}_2.$$

Die Messbarkeit ist also analog zur Stetigkeit definiert.

A.3 Wichtige Sätze der Maßtheorie

Wir zitieren ohne Beweis einige wichtige Sätze der Maßtheorie.

Theorem A.6 (Lemma von Fatou) *Seien $f_n \in L^1(\Omega;\mu)$ mit $f_n \geq 0$ fast überall und für eine Konstante $C > 0$ gelte*

$$\int\limits_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq C < \infty.$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n \in L^1(\Omega;\mu)$ und

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Korollar A.1 (Satz über die monotone Konvergenz (B. Levi)) *Es gelte $f_n \in L^1(\Omega;\mu)$ mit $f_n(x) \nearrow f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Dann folgt $f \in L^1(\Omega;\mu)$ und*

$$\int\limits_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Theorem A.7 (Konvergenzsatz von Lebesgue) *Seien f_n, f messbar und $g \in L^1(\Omega;\mu)$. Ferner gelte fast überall*

$$|f_n| \leq g \qquad \text{und } f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Dann gilt f_n, $f \in L^1(\Omega;\mu)$ und

$$\|f_n - f\|_{L^1(\Omega;\mu)} \to 0 \qquad \text{für } j \to \infty.$$

Speziell fordert die Voraussetzung $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ die punktweise Konvergenz der f_n, während $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ eine Aussage über die gleichmäßige Konvergenz der f_n darstellt.

Theorem A.8 (Satz von Egoroff) *Sei Ω beschränkt und f_n, f seien messbar. Dann sind äquivalent:*

(1) $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

(2) $f_n \to f$ fast gleichmäßig in Ω, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine messbare Menge $E_\varepsilon \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf E_ε.

Die Maßtheorie ist zu umfassend, um hier erschöpfend dargestellt werden zu können. In diesem Anhang fehlen wichtige Themen wie der Satz von Radon-Nikodym oder die Untersuchung von Youngschen Maßen oder Defektmaßen mit ihrer Bedeutung für die Analysis und Anwendungen.

A.4 Eigenschaften von $L^p(\Omega)$

Die Räume $L^p(\Omega)$ wurden in Sektion 1.5 eingeführt. Nachfolgend werden einige wichtige Eigenschaften dieser Räume zusammengestellt.

Theorem A.9 (Hölder-Ungleichung) *Seien* $1 \leq p, q \leq \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Für* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ *gilt* $fg \in L^1(\Omega)$ *und*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Zum Beweis des Theorems benötigen wir das folgende

Lemma A.1 (Youngsche Ungleichung) *Für* $a, b \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ *gilt*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \tag{A.3}$$

Beweis: Für $a = 0$ oder $b = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $a > 0$, $b > 0$ wenden wir ln() auf (A.3) an, so dass

$$\begin{aligned} \ln(ab) \;=\; \ln(a) + \ln(b) \;&=\; \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \\ &\leq\; \ln\Big(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\Big). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist eine Konsequenz der Konkavität des Logarithmus. $\square$

Beweis von Theorem A.9: Die Funktion fg ist messbar, da allgemein das Produkt messbarer Funktionen wieder messbar ist, siehe [15][Prop. 5.3.11(v)].

(a) 1. Fall: $p = 1$, $q = \infty$:

Es gilt für fast alle $x \in \Omega$

$$|(fg)(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} |f(x)|$$

und nach dem Konvergenz-Satz von Lebesgue, Theorem A.7, folgt

$$fg \in L^1(\Omega).$$

(b) 2. Fall: $p = \infty$, $q = 1$: Dies ist symmetrisch zu (a).

(c) 3. Fall: $1 < p, q < \infty$:

Die Behauptung ist klar, falls $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ oder $\|g\|_{L^q(\Omega)} = 0$, da dann $fg = 0$ fast überall in Ω.

Wir verwenden die Youngsche Ungleichung mit

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}, \qquad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}$$

und erhalten

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}}.$$

Die Terme auf der rechten Seite sind integrierbar. Damit ist $fg \in L^1(\Omega)$.

Integration über $x \in \Omega$ ergibt

$$\frac{\int_\Omega |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p}\frac{\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x}{\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{1}{q}\frac{\int_\Omega |g(x)|^q\,\mathrm{d}x}{\|g\|^q_{L^q(\Omega)}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Wir erhalten wie gewünscht

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad \square$$

Beispiel: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt, $f \in L^p(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (x)\,\mathrm{d}x\right|^p &= \left|\int_\Omega 1\cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right|^p \\ &\le \left[\Big(\int_\Omega 1^q\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\right]^p = |\Omega|^{\frac{p}{q}}\|f\|^p_{L^p(\Omega)}. \quad \square\end{aligned}$$

Theorem A.10 (Minkowski-Ungleichung) *Seien $f,\ g \in L^p(\Omega)$. Dann gilt $f+g \in L^p(\Omega)$ und*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis: (a) Sei $p=1$ oder $p=\infty$.

In diesem Fall folgt die Behauptung aus der punktweisen Abschätzung

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|.$$

(b) Sei $1<p<\infty$.

Wegen $x \mapsto x^p$ konvex gilt

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p \le \frac{1}{2}\big(|f|^p + |g|^p\big).$$

Dies ist äquivalent zu

$$|f+g|^p \le 2^{p-1}\big(|f|^p+|g|^p\big). \tag{A.4}$$

Es folgt $f+g \in L^p(\Omega)$. Schärfer als (A.4) ist die Ungleichung

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \le |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p\,\mathrm{d}x &\le \int_\Omega \Big(|f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\le \Big(\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \Big(\int_\Omega |g|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{A.5}$$

Dabei wurde die Hölder-Ungleichung verwendet, um die letzte Abschätzung zu erhalten. Es gilt $q(p-1)=p$, also sind das 2. und 4. Integral auf der rechten Seite von (A.5) wohldefiniert. Somit erhalten wir

$$\int_\Omega |f+g|^p\,\mathrm{d}x \le \left[\int_\Omega \Big(|f|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\right]\Big(\int_\Omega |f+g|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Falls $\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}x = 0$, so ist nichts zu zeigen. Division durch $\left(\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}$ liefert andernfalls

$$\Big(\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{1-(1-1/p)} = \Big(\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}. \quad \square$$

Theorem A.11 *$L^p(\Omega)$ ist vollständig für $1 \leq p \leq \infty$.*

Beweis: (a) $p = \infty$.

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^\infty(\Omega)$. Dann existiert eine Menge $L \subset \Omega$ mit $\mu(L) = 0$, so dass für alle $x \in \Omega \setminus L$ gilt (da bekanntlich jede Cauchy-Folge beschränkt ist)

$$\begin{aligned} |f_k(x)| &\leq \|f_k\|_{L^\infty} \leq C < \infty \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \\ |f_k(x) - f_l(x)| &\leq \|f_k - f_l\|_{L^\infty} \to 0 \qquad \text{für } k, l \to \infty. \end{aligned}$$

Also existiert punktweise

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_k(x), & x \in \Omega \setminus L, \\ 0, & x \in L. \end{cases}$$

Die Funktion f ist messbar (da alle f_k messbar sind und allgemein $\lim_k f_k$ messbar ist) und beschränkt. Für $x \in \Omega \setminus L$ gilt

$$|f(x) - f_k(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_l(x) - f_k(x)| \leq \liminf_{l\to\infty} \|f_l - f_k\|_{L^\infty}. \tag{A.6}$$

Aus (A.6) folgt daher

$$\|f - f_k\|_{L^\infty} \leq \liminf_{l\to\infty} \|f_l - f_k\|_{L^\infty} \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty. \quad \square$$

(b) Sei $1 \leq p < \infty$.

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Da jede Cauchy-Folge höchstens einen Häufungspunkt besitzt, genügt es zu zeigen, dass eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir wählen die Teilfolge so, dass

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^p} < \infty.$$

Dies ist möglich, da ein $\tilde{k}_i \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|f_k - f_l\|_{L^p} \leq 2^{-i}$ für alle $k, l \geq \tilde{k}_i$. Wir setzen noch $k_i := \max\{i, \tilde{k}_i\}$, damit sicher $k_i \to \infty$ gilt für $i \to \infty$.

Im folgenden bezeichnen wir f_{k_j} wieder als f_k. Die übrige Folge wird nicht mehr benötigt. Wir definieren für $x \in \Omega$ die Folge

$$g_l(x) := \sum_{k=1}^{l} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Die Folge $(g_l(x))_{l\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt nach den obigen Überlegungen sowie monoton wachsend in l.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \lim_{l\to\infty} g_l(x)^p \,\mathrm{d}x &\le \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega g_l^p(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_{l\to\infty} \|g_l\|_{L^p}^p \\
&\le \liminf_{l\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{l} \|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \right)^p \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_{L^p}^p < \infty. \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}
$$

Dabei wurde in der 1. Abschätzung das Lemma von Fatou, Theorem A.6, verwendet und in der 2. Abschätzung der Satz von Minkowski, Theorem A.10.

Aus (A.7) folgt, dass $\lim_{l\to\infty} g_l(x)$ existiert für fast alle $x \in \Omega$, also ist auch $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für fast alle $x \in \Omega$. Also existiert

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$. Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\|f - f_l\|_{L^p} \le \liminf_{k\to\infty} \|f_k - f_l\|_{L^p} \to 0 \qquad \text{für } l \to \infty,$$

da $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist. $\square$

Theorem A.12 (Dichte Teilmengen in $L^p(\mathbb{R}^N)$) *Sei $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Dann existiert eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^0(\mathbb{R}^N)$ mit $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$ für $k \to \infty$.*

Beweis: Aus der Konstruktion des Lebesgue-Integrals in Abschnitt A.2 folgt, dass sich f in $\|\cdot\|_{L^p}$ beliebig gut durch Treppenfunktionen approximieren lässt. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$f = \mathcal{X}_E \qquad \text{für } E \subset \mathbb{R}^N \text{ Lebesgue-messbar}, \mu(E) < \infty.$$

Genauer können wir nach den Konstruktionen aus Abschnitt A.2 sogar ohne Einschränkung annehmen, dass

$$f = \mathcal{X}_Q \qquad \text{mit } Q = \times_{i=1}^N [a_i, b_i).$$

Wir setzen

$$f_\varepsilon(x) := \prod_{i=1}^N \max\left\{0, \min\left\{\frac{g_i(x_i)}{\varepsilon}, 1\right\}\right\}, \qquad g_i(\xi) := \frac{b_i - a_i}{2} - \left|\xi - \frac{b_i + a_i}{2}\right|.$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ gilt $f_\varepsilon \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Bemerkung: Theorem A.12 gilt nicht für $p = \infty$, da der gleichmäßige Limes f stetiger Funktionen f_k wieder stetig ist (und nicht alle Funktionen f in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ sind stetig).

Ein Beweis der folgenden beiden Theoreme findet sich etwa in [2].

Theorem A.13 (Dualraum von $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$) *Sei $1 \le p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist durch*

$$J_f(g) := \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{A.8}$$

ein linearer Isomorphismus $J : L^q(\Omega;\, \mu) \to (L^p(\Omega;\, \mu))'$ definiert.

Die Wohldefiniertheit von J_f in (A.8) folgt aus der Hölder-Ungleichung. Dass J_f ein Isomorphismus ist, bedarf jedoch eines Beweises.

Im besonderen ist $L^\infty(\Omega)$ nach Theorem A.13 der Dualraum von $L^1(\Omega)$. Der Dualraum zu $L^\infty(\Omega)$ ist jedoch nicht isomorph zu $L^1(\Omega)$, sondern umfasst daneben auch Maße. Er soll hier nicht klassifiziert werden.

Zum Vergleich ist der Dualraum von $C^0(\Omega)$ isomorph zu den *Radonmaßen*, d.h.

$$(C^0(\Omega))' \equiv \mathcal{M}(\Omega) = \mathrm{rca}(\Omega).$$

Dies sind die regulären, σ-additiven und beschränkten Maße.

Zur Erklärung der Terminologie definieren wir

$$|\nu|(E) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^m |\nu(E_i)| \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\, E_i \in \mathcal{B} \text{ paarweise disjunkt}, E_i \subset E \right\}.$$

Dann ist

$$\|\nu\|_{\mathrm{var}} := |\nu|(\Omega)$$

die *Total-Variation* von ν. Ist $\|\nu\|_{\mathrm{var}} < \infty$, so heißt das Maß *beschränkt.*

Weiter heißt ein Maß *regulär*, falls für $E \in \mathcal{B}$ gilt

$$\inf\{|\lambda|(U \setminus A) \mid A \subset E \subset U,\, A \text{ abgeschlossen}, U \text{ offen}\} = 0.$$

Eine Menge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt *präkompakt*, falls für $\varepsilon > 0$ die Menge A eine endliche Überdeckung mit ε-Kugeln besitzt. Ist X ein Banachraum, so gilt:

$$A \text{ präkompakt} \iff \overline{A} \text{ ist kompakt.}$$

Theorem A.14 (Satz von Arzelà-Ascoli) *Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt. Es gilt*

$A \subset C^0(K)$ ist präkompakt $\iff$ A ist beschränkt*, d.h.*

$$\sup_{f\in A} \sup_{x\in K} |f(x)| \le C_0$$

für eine Konstante C_0, und A ist gleichgradig stetig*, d.h.*

$$\sup_{f\in A} |f(x) - f(y)| \to 0 \qquad \text{für } |x - y| \to 0.$$

Bemerkung: Die Voraussetzungen von Satz A.14 sind zum Beispiel erfüllt für Mengen $A \subset C^{0,\alpha}(K)$, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(K)}$ beschränkt sind.

Beweis: '$\Leftarrow$': Sei $\varepsilon > 0$ und $A \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B_\varepsilon(f_i^\varepsilon)$ für geeignete Funktionen $f_i^\varepsilon \in C^0(K)$. Da $f \in B_\varepsilon(f_{i_0}^\varepsilon)$ für ein $i_0 \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$, gilt für eine Konstante C_0

$$\|f\|_\infty \leq \varepsilon + \|f_{i_0}^\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon + \max_{1 \leq i \leq N_\varepsilon} \|f_i^\varepsilon\|_\infty \leq C_0 < \infty,$$

also auch

$$\sup_{f \in A} \|f\|_\infty \leq C_0.$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{i_0}^\varepsilon(x) + f_{i_0}^\varepsilon(x) - f_{i_0}^\varepsilon(y) + f_{i_0}^\varepsilon(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_{i_0}^\varepsilon\|_\infty + |f_{i_0}^\varepsilon(x) - f_{i_0}^\varepsilon(y)|, \end{aligned}$$

also

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon + \max_{1 \leq i \leq N_\varepsilon} |f_i^\varepsilon(x) - f_i^\varepsilon(y)|.$$

Der letzte Term konvergiert gegen 0 für $|x - y| \to 0$ und jedes $\varepsilon > 0$. Also ist A gleichgradig stetig.

'$\Rightarrow$': Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Zahl $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sowie $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^N$ und $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$ mit

$$B_{C_0}(0) \subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(\xi_i), \qquad K \subset \bigcup_{j=1}^m B_\varepsilon(x_j),$$

wobei C_0 die Konstante aus der Voraussetzung des Satzes ist.

Sei Σ_m die Menge aller Abbildungen $\{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$. Zu $\pi \in \Sigma_m$ definieren wir

$$A_\pi := \{f \in A \mid |f(x_j) - \xi_{\pi(j)}| \leq \varepsilon \text{ für alle } 1 \leq j \leq m\}.$$

Sei $f \in A$. Dann existiert ein π mit $f \in A_\pi$. Für jedes $\tilde{\pi} \in \Sigma_m$ mit $A_{\tilde{\pi}} \neq \emptyset$ wählen wir einen Repräsentanten $f_{\tilde{\pi}} \in A_{\tilde{\pi}}$ aus. Ist $x \in K$, so $x \in B_\varepsilon(x_j)$ für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$, also

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\pi(x)| &\leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - \xi_{\pi(j)}| + |\xi_{\pi(j)} - f_\pi(x_j)| \\ &\quad + |f_\pi(x_j) - f_\pi(x)| \\ &\leq 2 \sup_{|y-z| \leq \varepsilon} \sup_{f \in A} |f(y) - f(z)| + 2\varepsilon =: r_\varepsilon, \end{aligned}$$

also

$$A \subset \bigcup_{\pi \in \Sigma_m} B_{r_\varepsilon}(f_\pi).$$

Wegen $r_\varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ ist A also präkompakt. $\square$

Theorem A.15 (Präkompakte Mengen in $L^p(\mathbb{R}^N)$) *Für $1 \leq p < \infty$ ist eine Menge $A \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ genau dann präkompakt, wenn*

(i) $\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p} \leq C$,

(ii) $\sup_{f \in A} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} \to 0$ *für* $|h| \to 0$,

(iii) $\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \to 0$ *für* $R \nearrow \infty$.

Anhang B

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1 (Variation eines Funktionals) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, $u \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ mit $N \geq 1$. Wir setzen*

$$F(u) := \int_\Omega c(u)|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x$$

mit $c \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $c \geq 0$. Berechnen Sie die 1. Variation $\delta F(u, \varphi)$ von F für $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

Zusatz*: Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für eine Extremale $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$!*

Lösung:

1. Methode: Wir gehen analog (2.1) aus Kapitel 1 vor, d.h. es gilt

$$f(x, z, p) = c(z)p^2,$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, z, p) = c'(z)p^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial p}(x, z, p) = 2c(z)p.$$

Wir erhalten wie in (2.1)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), \nabla u(x))\varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \varphi(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega c'(u(x))|\nabla u|^2\varphi(x) + 2c(u(x))\nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Das letzte Integral auf der rechten Seite definiert $\delta F(u, \varphi)$.

2. Methode: Wir berechnen die 1. Variation von F direkt aus der Definition.

Es gilt

$$F(u + \varepsilon\varphi) = \int_\Omega c(u + \varepsilon\varphi)|\nabla(u + \varepsilon\varphi)|^2 \,\mathrm{d}x,$$

daher

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F(u+\varepsilon\varphi) &= \int\limits_{\Omega} \Big[c'(u+\varepsilon\varphi)\varphi|\nabla(u+\varepsilon\varphi)|^2 \\ &\qquad +c(u+\varepsilon\varphi)2\nabla(u+\varepsilon\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\nabla(u+\varepsilon\varphi)\Big]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\delta F(u,\varphi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int\limits_{\Omega} c'(u)|\nabla u|^2\varphi + 2c(u)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass $|\nabla u|^2 = \nabla u\cdot\nabla u$ eine quadratische Form ist, daher

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}|\nabla(u+\varepsilon\varphi)|^2 &= 2\nabla(u+\varepsilon\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}(\nabla u+\varepsilon\nabla\varphi) \\ &= 2\nabla(u+\varepsilon\varphi)\cdot\nabla\varphi.\end{aligned}$$

Zusatz: Für $u\in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ kann man partiell integrieren. Nach dem *Satz von Gauß* gilt für ein C^1-Vektorfeld h und für den Fall, dass $\partial\Omega$ Lipschitz-stetig ist,

$$\int\limits_{\Omega}\operatorname{div} h\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} h\cdot n\,\mathrm{d}s, \tag{B.1}$$

wobei n die äußere Normale an $\partial\Omega$ bezeichne. Wählen wir speziell $h = u\nabla v$, so folgt die *Greensche Formel*

$$\int\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\Omega} u\triangle v\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega} u\partial_n v\,\mathrm{d}s. \tag{B.2}$$

Wir integrieren den oben berechneten Ausdruck $\delta F(u,\varphi)$ partiell, indem wir die Ableitung von der Testfunktion φ auf $2c(u)\nabla u$ wälzen, was jetzt erlaubt ist, da $u\in C^2(\Omega;\mathbb{R})$. Randterme treten bei der partiellen Integration nicht auf, da φ auf $\partial\Omega$ verschwindet. Wir erhalten

$$\begin{aligned}0 &= \int\limits_{\Omega}\Big[c'(u)|\nabla u|^2 - \operatorname{div}(2c(u)\nabla u)\Big]\varphi\,\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_{\Omega}\Big[2c(u)\triangle u + c'(u)|\nabla u|^2\Big]\varphi\,\mathrm{d}x, \qquad\text{(B.3)}\end{aligned}$$

da (wir verwenden die Summen-Konvention)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(c(u)\nabla u) &= \partial_i(c(u)\partial_i u) \\ &= c'(u)\partial_i u\partial_i u + c(u)\partial_i\partial_i u \\ &= c'(u)\nabla u\cdot\nabla u + c(u)\triangle u \\ &= c'(u)|\nabla u|^2 + c(u)\triangle u.\end{aligned}$$

Mit dem Fundamental-Lemma der Variationsrechnung (Theorem 2.2) folgt aus (B.3)

$$2c(u(x))\triangle u(x) + c'(u(x))|\nabla u(x)|^2 = 0 \qquad \text{für } x\in\Omega. \quad \square$$

Aufgabe 2 (1. Variation für Funktionale mit höheren Ableitungen)
Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $u \in C^2((a,b);\mathbb{R}^M)$ und

$$F(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x), u''(x))\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie $\delta F(u,\varphi)$ für $\varphi \in C^2((a,b);\mathbb{R}^M)$ und geben Sie eine hinreichende Bedingung an f für die Wohldefiniertheit der 1. Variation an!

Zusatz*: Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen, falls u glatt genug ist?*

Lösung:

(a) Hinreichende Bedingung an f: Analog Kapitel 1 fordern wir

$$f \in C^1(U(G))$$

mit einer offenen Umgebung U von G und

$$G := \Big\{(x, u(x), u'(x), u''(x)) \mid x \in [a,b]\Big\},$$

dem *2-Graph* von u.

(b) 1. Variation von F:

$$\begin{aligned}
\delta F(u,\varphi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} F(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_a^b f(x, u(x)+\varepsilon\varphi(x), u'(x)+\varepsilon\varphi'(x), u''(x)+\varepsilon\varphi''(x))\,\mathrm{d}x\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial z}()\cdot\varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial p}()\cdot\varphi'(x) + \frac{\partial f}{\partial s}()\cdot\varphi''(x)\Big]\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Hier bedeutet () immer $(x, u(x), u'(x), u''(x))$.

Zusatz: Nach partieller Integration folgt

$$\delta F(u,\varphi) = \int_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial z}() - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial p}() + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial f}{\partial s}()\Big]\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mit dem Fundamental-Lemma 2.2 folgt wieder

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x), u''(x)) &- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), u'(x), u''(x)) \\
&+ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0
\end{aligned}$$

für $x \in (a,b)$. $\square$

Aufgabe 3 (Extrema mit Nebenbedingungen) *Welcher Punkt der Ellipse*

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

liegt dem Punkt $(1, 0)$ *am nächsten?*

Lösung:

1. Methode: Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ minimieren wir das Quadrat des Euklidischen Abstandes zu $(1, 0)$, in Formeln

$$d(x, y) := (x - 1)^2 + y^2 \to \min$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Wir schreiben diese Nebenbedingung um zu $y^2 = 1 - \frac{1}{4}x^2$ und setzen dies statt y in der Definition von d ein. Wir erhalten also das neue Minimierungsproblem

$$\tilde{d}(x) := (x - 1)^2 + 1 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 2 \to \min .$$

Eine notwendige Bedingung für einen optimalen Wert x ist

$$\tilde{d}'(x) = \frac{3}{2}x - 2 = 0.$$

Dies führt zu $x = \frac{4}{3}$ und $y^2 = \frac{5}{9}$. Die optimalen Lösungen sind daher

$$\Big(\frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\Big),$$

die beide den gleichen Abstand zu $(1, 0)$ haben.

2. Methode: Wir führen einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ ein und schreiben

$$d(x, y, \lambda) := (x - 1)^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4) \to \min$$

in $\mathbb{R}^3$ ohne weitere Nebenbedingungen. Ein kritischer Punkt (x, y, λ) dieses Minimierungsproblems ohne Nebenbedingung muss

$$\nabla d(x, y, \lambda) = 0$$

erfüllen, da der Gradient der Nebendingungen vollen Rang hat. Partielles Ableiten von d nach x, y bzw. λ ergibt die 3 Gleichungen

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 2(x-1) + 2\lambda x & = & 0, \\ (II) & y(1 + 4\lambda) & = & 0, \\ (III) & x^2 + 4y^2 - 4 & = & 0. \end{array}$$

Nach Gleichung (II) sind die folgenden 2 Fälle wesentlich.

1. Fall: $y = 0$. Nach (III) dann $x = +2$ oder $x = -2$.

2. Fall: $\lambda = \frac{1}{4}$. Aus (I) folgt $x = \frac{4}{3}$. Einsetzen dieses Wertes in (III) liefert $y^2 = \frac{5}{9}$.

Durch explizites Berechnen des Abstandes für die 4 Kandidaten $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(4/3, +\sqrt{5}/3)$ und $(4/3, -\sqrt{5}/3)$ ermitteln wir, dass

$$\Big(\frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\Big)$$

die optimalen Lösungen sind. Die Punkte $(\pm 2, 0)$ sind die Maxima von d. $\square$

Aufgabe 4 (Beispiel eines Minimierers in $C^1 \setminus C^2$) *Beweisen Sie, dass die Funktion*

$$u_{\text{opt}}(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0], \\ x^2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

der eindeutige Minimierer von

$$F(u) := \int_{-1}^{+1} (2x - u'(x))^2 u^2(x)\,\mathrm{d}x$$

in der Klasse

$$X := \Big\{ v \in C^1([-1,+1];\mathbb{R}) \,\Big|\, v(-1) = 0,\ v(+1) = 1 \Big\}$$

ist, aber $u_{\text{opt}} \notin C^2([-1,+1];\mathbb{R})$.

Beweis: (a) $u_{\text{opt}} \in X$, da $u_{\text{opt}}(-1) = 0$, $u_{\text{opt}}(+1) = 1$, und u'_{opt} existiert und ist stetig auf $[-1,+1]$, da i.b. $u'_{\text{opt}}(0) = 0$.

(b) Es ist $F(u) \geq 0$ für alle u, daher gilt

$$\inf_{u \in X} F(u) \geq 0.$$

(c) Es ist

$$F(u_{\text{opt}}) = \int_{-1}^{0} (2x - u'_{\text{opt}}(x))^2 \underbrace{u_{\text{opt}}(x)^2}_{=0}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \underbrace{(2x - u'_{\text{opt}}(x))^2}_{=0} u_{\text{opt}}(x)^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Zusammen mit (b) folgt, dass u_{opt} Minimierer von F in X ist.

(d) $u_{\text{opt}} \notin C^2((0,1))$, da $u''_{\text{opt}}(x) = 2 \neq 0$ auf $[0,1]$.

(e) Eindeutigkeit: Nach Definition von F muss $u'(x) = 2x$ oder/und $u(x) = 0$ gelten, jeweils auf $(-1,0)$ und $(0,1)$. Die Funktionen, die diese Bedingungen außer u_{opt} erfüllen, sind $u_1(x) \equiv 0$, $u_2(x) = x^2$ und

$$u_3(x) := \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0], \\ 0, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Aber $u_1, u_2, u_3 \notin X$, da jeweils eine der Randbedingungen verletzt wird. □

Aufgabe 5 (Konstruktion von Funktionalen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand, $f \in C^0(\Omega;\mathbb{R})$ sowie $p > 0$, $q > 2$ zwei Konstanten. Finden Sie auf $C^1(\Omega;\mathbb{R})$ definierte Funktionale F_a bzw. F_b, so dass die Euler-Lagrange-Gleichungen für $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ und $x \in \Omega$ jeweils lauten*

(a) $\triangle u(x) = u(x)^p$,

(b) $\operatorname{div}\big(|\nabla u(x)|^{q-2} \nabla u(x)\big) = f(x)$.

Konstruktion: Für eine Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ muss gelten

Im Fall (a):

$$\begin{aligned} 0 = \delta F(u, \varphi) &= \int\limits_\Omega \big[-\triangle u + u^p \big] \varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_\Omega \big[\nabla u \cdot \nabla \varphi + u^p \big] \varphi \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Der Integrand $[\ldots]$ muss nach u hochintegriert werden. Damit ergibt sich

$$F_a(u) := \int\limits_\Omega \Big(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} u^{p+1} \Big) \, \mathrm{d}x.$$

Im Fall (b):

$$\begin{aligned} 0 = \delta F(u, \varphi) &= \int\limits_\Omega \big[-\operatorname{div}(|\nabla u|^{q-2} \nabla u) + f \big] \varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_\Omega \big[|\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi + f \varphi \big] \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Wir integrieren den Integrand nach u und erhalten

$$F_b(u) := \int\limits_\Omega \Big(\frac{1}{q} |\nabla u|^q + f u \Big) \, \mathrm{d}x. \quad \square$$

Aufgabe 6 (Problem der Dido) *Lösen Sie das Problem der Dido (Beispiel 2 aus Kapitel 1) in der folgenden Form: Sei $L > 0$ eine vorgegebene Länge. Gesucht wird ein Maximierer des Flächenfunktionals, d.h. zu lösen ist*

$$F(u) := \int\limits_0^L u(s) \sqrt{1 - (u'(s))^2} \, \mathrm{d}s \to \max$$

in der Klasse

$$X := \Big\{ u \in C^1([0, L]; \, [0, \infty)) \, \Big| \, u(0) = u(L) = 0 \Big\}.$$

Hinweis: Die Euler-Lagrange-Gleichung des Maximierers u führt auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u(s) u''(s) - (u'(s))^2 + 1 = 0, \qquad s \in (0, L),$$

deren Lösung nach Umparametrisierung ein Kreisbogen ist.

Beweis: Die 1. Variation von F ergibt für $\varphi \in C_0^\infty((0,L))$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} F(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big[(u+\varepsilon\varphi)\sqrt{1-(u'+\varepsilon\varphi')^2}\Big]\,\mathrm{d}s\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^L \Big[\varphi\sqrt{1-(u'+\varepsilon\varphi')^2} \\
&\qquad + \frac{(u+\varepsilon\varphi)\cdot\big(-2u'\varphi' - 2\varepsilon(\varphi')^2\big)}{2\sqrt{1-(u'+\varepsilon\varphi')^2}}\Big]\,\mathrm{d}s\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^L \Big[\varphi\sqrt{1-(u')^2} - \frac{uu'\varphi'}{\sqrt{1-(u')^2}}\Big]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
-\int_0^L & uu'(1-(u')^2)^{-1/2}\varphi'\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^L \Big[((u')^2 + uu'')(1-(u')^2)^{-1/2} + uu'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[(1-(u')^2)^{-1/2}\big]\Big]\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^L \frac{(u')^2 + uu''}{(1-(u')^2)^{1/2}} + \frac{u(u')^2u''}{(1-(u')^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Beziehung

$$\int_0^L \Big[\sqrt{1-(u')^2} + \frac{(u')^2+uu''}{(1-(u')^2)^{1/2}} + \frac{u(u')^2u''}{(1-(u')^2)^{3/2}}\Big]\varphi\,\mathrm{d}s = 0.$$

Nach dem Fundamental-Lemma 2.2 wird $[\ldots] = 0$ in $[0,L]$. Multiplikation mit $(1-(u')^2)^{3/2}$ ergibt

$$\big(1-(u')^2\big)^2 + \big((u')^2 + uu''\big)\big(1-(u')^2\big) + u(u')^2u'' = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$u(s)u''(s) - (u'(s))^2 + 1 = 0, \qquad s \in (0,L), \tag{B.4}$$

Zur Lösung dieser Gleichung differenzieren wir (B.4) nach s und erhalten nach Umformung

$$\frac{u'(s)}{u(s)} = \frac{u'''(s)}{u''(s)},$$

also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln u(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln u'(s)$, nach Hochintegrieren also für eine Konstante $\tilde{c}$

$$\ln u(s) + \tilde{c} = \ln u''(s).$$

Nach Anwendung der Exponential-Funktion folgt für $c := e^{\tilde{c}}/\tilde{c}$ also die lineare Gleichung

$$u''(s) - cu(s) = 0.$$

Diese hat bekanntlich die Lösungen

$$u(s) = Ae^{\sqrt{c}s} + Be^{-\sqrt{c}s}$$

für geeignete Konstanten A, B, wobei wegen der Randbedingung in 0 gilt $u(0) = 0 = A + B$. Um die Randbedingung $u(L) = 0$ zu erfüllen, gilt ferner $\sqrt{c}L = \pi i k$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, also

$$u(s) = Ae^{\pi/Lkis} - Ae^{-\pi/Lkis} = D \sin\left(\frac{\pi}{L}ks\right),$$

mit $D := 2iA$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $D = \frac{L}{\pi k}$, also $u(s) = \frac{L}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k s}{L}\right)$. Wegen der Bedingung $u \geq 0$ gilt $k = 1$, wir erhalten also

$$u(s) = \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi s}{L}\right).$$

Parametrisieren wir von der Bogenlänge s zurück nach x, so beschreibt dies einen Halbkreis. $\square$

Aufgabe 7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt, $1 \leq p < \infty$ und $u \in C_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c = c(N, p, \Omega)$ existiert mit*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Hinweis: Setzt man u außerhalb von Ω durch 0 fort, so gilt für $x = (x_1, \overline{x})$ und hinreichend großes $R > 0$

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1, \overline{x}) = u(x_1, \overline{x}) - u(-R, \overline{x}) \\ &= \int_{-R}^{x_1} \partial_1 u(s, \overline{x}) \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Beweis: Verwendet man den Ansatz aus dem Hinweis, so folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-R}^{x_1} 1 \cdot \partial_1 u(s, \overline{x}) \, \mathrm{d}s \\ &\leq \left(\int_{-R}^{x_1} 1 \, \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{-R}^{x_1} |\partial_1 u(s, \overline{x})|^p \, \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Folglich

$$|u(x)| \leq (2R)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{-R}^{+R} |\nabla u(s, \overline{x})|^p \, \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Integrieren wir diese Ungleichung auf, so folgt

$$
\begin{aligned}
\int_{-R}^{+R} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x)|^p \, \mathrm{d}\overline{x} \, \mathrm{d}x_1 &\leq \int_{-R}^{+R} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (2R)^{\frac{p}{q}} \int_{-R}^{+R} |\nabla u(s, \overline{x})|^p \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\overline{x} \, \mathrm{d}x_1 \\
&= (2R)^{\frac{p}{q}} \int_{-R}^{+R} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-R}^{+R} |\nabla u(s, \overline{x})|^p \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\overline{x} \, \mathrm{d}x_1 \\
&= (2R)^{\frac{p}{q}+1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-R}^{+R} |\nabla u(s, \overline{x})|^p \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\overline{x}.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten wegen $1 + \frac{p}{q} = p$

$$
\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_{-R}^{+R} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x)|^p \, \mathrm{d}\overline{x} \, \mathrm{d}x_1 \leq (2R)^p \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}. \quad \square
$$

Aufgabe 8 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung) *Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ für $i = 1, \ldots, n$ mit Exponenten $1 \leq p_i \leq \infty$ und*

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1.
$$

Zeigen Sie, dass dann $f_1 \cdots f_n \in L^1(\Omega)$ gilt mit

$$
\Big\| \prod_{i=1}^{n} f_i \Big\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \tag{B.5}
$$

Beweis: Es ist möglich, den Beweis analog Theorem A.9 der Vorlesung zu führen. Allerdings bedarf es dabei einer gewissen Sorgfalt, um die *allgemeine Youngsche Ungleichung*

$$
\frac{1}{p} \prod_{i=1}^{n} a_i^p \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} a_i^p \qquad \text{für } a_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n
$$

als Folgerung der Konkavität von $\ln(\cdot)$ zu zeigen.

Alternativ führen wir hier den Beweis mit der klassischen Hölder-Ungleichung und Induktion. Zunächst beweisen wir folgendes

Lemma: Seien $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ für $p \geq 1$, $q \geq 1$. (Es genügt $p > 0$, $q > 0$.) Für einen Index r sei

$$
\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.
$$

Dann gilt

$$
fg \in L^r(\Omega), \qquad \|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.
$$

Beweis: Da f, g messbar sind, ist auch $|fg|^r$ messbar. Anwendung der klassischen Hölder-Ungleichung auf $|f|^r$ und $|g|^r$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |fg|^r \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(|f|^p\right)^{\frac{r}{p}} \left(|g|^q\right)^{\frac{r}{q}} \mathrm{d}x \\ &\le \Big(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{r}{p}} \Big(\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{r}{q}},\end{aligned}$$

also

$$\|fg\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \quad \square$$

Wir zeigen den Beweis der Aufgabe zunächst für den Spezialfall $n = 3$. Sei also

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 \tag{B.6}$$

und $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $h \in L^r(\Omega)$.

Sei s der duale Exponent zu r, d.h.

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Dann gilt nach obigem Lemma $fg \in L^s(\Omega)$ und

$$\|fg\|_{L^s} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \tag{B.7}$$

Weiter gilt wegen (B.6)

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Wenden wir die klassische Hölder-Ungleichung auf die Funktionen $(fg) \in L^s(\Omega)$ und $h \in L^r(\Omega)$ an, so gilt

$$\|fgh\|_{L^1} \le \|fg\|_{L^s}\|h\|_{L^r},$$

also ist $fgh \in L^1(\Omega)$ und wegen (B.7) folgt

$$\|fgh\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\|h\|_{L^r}.$$

Dies beweist (B.5) für den Fall $n = 3$. Der allgemeine Fall folgt analog durch vollständige Induktion. $\square$

Aufgabe 9 (Natürliche Randbedingungen) *Es bezeichne*

$$B^+ := \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < 1,\ x_2 > 0\right\}$$

die obere Hälfte des Einheitsballs im $\mathbb{R}^2$*,* $I := (-1, +1) \times \{0\}$ *sei der untere Rand von* B^+*. Für* $M \ge 1$ *und* $u \in C^2(\overline{B^+}; \mathbb{R}^M)$*,* $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2M} \times \mathbb{R}^{2M})$ *betrachten wir Funktionale der Form*

$$F(u) := \int_{B^+} f(x, u(x), Du(x)) \,\mathrm{d}x,$$

wobei Du die Fréchet-Ableitung von u bezeichne. Es gelte $\delta F(u,\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(B^+ \cup I;\, \mathbb{R}^M)$. Zeigen Sie, dass dann die natürlichen Randbedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial p_2^j}(\cdot, u, Du) = 0 \qquad \text{auf } I,\ j = 1, 2, \ldots, M$$

gelten.

Zusatz*: Wie lauten die natürlichen Randbedingungen für das Dirichlet-Funktional*

$$F_D(u) := \frac{1}{2} \int\limits_{B^+} |Du(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

explizit?

Beweis: Sei zunächst $M = 1$. Der Beweis wird analog zum Beweis von Theorem 2.7 geführt. Durch direkte Berechnung von $F(u + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0}$ für $\varphi \in C_0^\infty(B^+)$ erhalten wir genau wie in (2.1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} F(u + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{B^+} \Big[\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, u, \nabla u) - \operatorname{div} \frac{\partial f}{\partial p}(\cdot, u, \nabla u)\Big] \varphi \,\mathrm{d}x = 0, \tag{B.8}$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div} \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \qquad \text{für alle } x \in B^+. \tag{B.9}$$

Aufgrund der Stetigkeit der linken Seite bis zu ∂B^+ wegen der Voraussetzung $u \in C^2(\overline{B^+};\, \mathbb{R}^M)$ gilt (B.9) dann auch für alle $x \in \overline{B^+}$. Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(B^+ \cup I;\, \mathbb{R})$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 = \delta F(u,\varphi) &= \int\limits_{B^+} \frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, u, \nabla u)\varphi + \frac{\partial f}{\partial p}(\cdot, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{B^+} \Big[\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, u, \nabla u) - \operatorname{div} \frac{\partial f}{\partial p}(\cdot, u, \nabla u)\Big]\varphi \,\mathrm{d}x + \int\limits_I \varphi \frac{\partial f}{\partial p}(\cdot, u, \nabla u) \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

Hier wurde beim Übergang zur 2. Zeile partiell integriert und $\vec{n} := (0, -1)^t$ bezeichnet die äußere Normale von B^+ an I.

Da das erste Integral rechts nach (B.8) verschwindet, folgt

$$\int\limits_I \varphi \frac{\partial f}{\partial p_2}(\cdot, u, \nabla u) \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(I;\, \mathbb{R}).$$

Nach dem Fundamental-Lemma der Variationsrechnung ergibt sich daher wie behauptet

$$\frac{\partial f}{\partial p_2}(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \qquad \text{für } x \in I.$$

Ist allgemein $M \geq 1$, so kann (B.8) für jede Komponente $\frac{\partial f}{\partial p^j}$, $1 \leq j \leq M$ betrachtet werden.

Zusatz: Für das Dirichlet-Funktional und $M = 1$ folgt $\frac{\partial f}{\partial p}(x, z, p) = p = (p_1, p_2)$, also

$$\frac{\partial f}{\partial p_2}(x, z, p) = p_2$$

und wir erhalten die natürlichen Randbedingungen $\partial_2 u(x, 0) = 0$. Für $M \geq 1$ sind die natürlichen Randbedingungen des Dirichlet-Funktionals also allgemein

$$\partial_2 u_j(x, 0) = 0 \qquad \text{für alle } -1 < x < +1,\ 1 \leq j \leq M. \tag{B.10}$$

(B.10) stimmt mit den *Neumann-Randbedingungen* an I für u überein. $\square$

Aufgabe 10 (Energie-Erhaltung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand. Die Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ löse die lineare Wellengleichung*

$$\partial_{tt} u(x, t) = \triangle u(x, t)$$

in $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$ und u verschwinde auf dem Rand von Ω, d.h. $u(x, t) = 0$ für $x \in \partial\Omega$, $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Energie

$$E(t) := \int_\Omega [\partial_t u(x, t)]^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \,\mathrm{d}x$$

unabhängig von der Zeit ist, d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) = 0$.

Beweis: Nach dem Satz von Gauß gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega [\partial_t u(x, t)]^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ [\partial_t u(x, t)]^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega 2\partial_t u(x, t) \partial_{tt} u(x, t) + 2\nabla u(t) \cdot \nabla \partial_t u(x, t) \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_\Omega \big[\partial_t u(x, t) - \partial_t u(x, t)\big] \triangle u(x, t) \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \partial_t u(x, t) \cdot \partial_n u(x, t) \,\mathrm{d}S(x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da $0 = \partial_n u(x, t) = \nabla u(x, t) \cdot n$ auf $\partial\Omega$ gilt wegen $u = 0$ auf $\partial\Omega$. $\square$

Aufgabe 11 (Innere Variation 2. Ordnung) *Sei*

$$F(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x), u''(x)) \,\mathrm{d}x$$

ein Operator mit $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M)$, $u \in C^2([a, b]; \mathbb{R}^M)$ und $\lambda := \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0) \in C^2([a, b])$, wobei $(\xi(\cdot, \varepsilon))_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)}$ eine zulässige Parameter-Variation ist. Berechnen Sie analog Theorem 2.9 die innere Variation $\partial F(u, \lambda)$.

Beweis: Wir verwenden die Methodik und die Notationen von Satz 2.9 und definieren

$$\begin{aligned}\tau(x,\varepsilon) &:= (\xi(x,\varepsilon))^{-1},\\ v(t,\varepsilon) &:= u(\xi(t,\varepsilon))\end{aligned}$$

und setzen

$$\Psi(\varepsilon) := F(v(\cdot,\varepsilon)) = \int\limits_a^b f\Big(t, v(t,\varepsilon), \frac{\partial v}{\partial t}(t,\varepsilon), \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Wir substituieren $t := \tau(x,\varepsilon) = \tau(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)$, so dass also

$$\mathrm{d}t = \frac{\partial \tau}{\partial x}(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}v(t,x) &= u(x),\\ \frac{\partial v}{\partial t}(t,\varepsilon) &= u'(x)\frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\varepsilon) = u'(x)\frac{1}{\partial_x\tau(x,\varepsilon)},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,\varepsilon) &= u''(x)\frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\varepsilon) + u'(x)\frac{\partial^2 \xi}{\partial_t^2}(t,\varepsilon)\\ &= u''(x)\frac{1}{\partial_x\tau(x,\varepsilon)} + u'(x)\frac{\partial^2 \xi}{\partial_t^2}(t,\varepsilon).\end{aligned}$$

Nun differenzieren wir genau wie in Satz 2.9 die Beziehung

$$\tau(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) = t \tag{B.11}$$

nach t bzw. nach ε. Dies liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial x}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\varepsilon) &= 1,\\ \frac{\partial \tau}{\partial x}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon) + \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon) &= 0.\end{aligned}$$

Wir benötigen noch

$$\tau(x,0) = x, \qquad \tau_x(x,0) = 1, \qquad \tau_\varepsilon(x,0) = -\lambda(x), \qquad \tau_{\varepsilon x}(x,0) = -\lambda'(x),$$

also

$$\tau_{\varepsilon xx}(x,0) = -\lambda''(x), \qquad \tau_{xx}(x,0) = 0.$$

Wir leiten (B.11) noch einmal ab, da wir 2. partielle Ableitungen benötigen:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big(\frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\varepsilon)\Big)^2 + \frac{\partial \tau}{\partial x}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(t,\varepsilon) = 0$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\frac{1}{(\partial_x\tau(t,\varepsilon))^2} + \frac{\partial \tau}{\partial x}(x,\varepsilon)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(t,\varepsilon) = 0.$$

Es folgt

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(t,\varepsilon) = -\frac{\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,\varepsilon)}{[\partial_x \tau(x,\varepsilon)]^3}.$$

Damit erhalten wir

$$\Psi(\varepsilon) \quad = \quad \int_a^b f\Big(\tau(x,\varepsilon), u(x), u'(x) \cdot \frac{1}{\partial_x \tau(x,\varepsilon)}, u''(x)\frac{\tau_{xx}(x,\varepsilon)}{[\partial_x \tau(x,\varepsilon)]^3}\Big)\tau_x(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x.$$

Für die Ableitung von Ψ nach ε also

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Psi(\varepsilon) \quad = \quad & \int_a^b \Big\{\partial_x f()\tau_\varepsilon(x,\varepsilon) + u'(x)\cdot \partial_p f()\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big(\frac{1}{\tau_x(x,\varepsilon)}\Big) \\ & -u'(x)\cdot\partial_s f()\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big[\frac{\partial_{xx}(x,\varepsilon)}{(\partial_x\tau(x,\varepsilon))^3}\Big] \\ & +u''(x)\cdot\partial_s f()\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big[\frac{1}{\tau_x(x,\varepsilon)}\Big]\Big\}\tau_x(x,\varepsilon) + \int_a^b f()\tau_{\varepsilon x}(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big[\frac{\tau_{xx}(x,\varepsilon)}{(\partial_x\tau(x,\varepsilon))^3}\Big]\Big|_{\varepsilon=0} = -\lambda''(x)$$

erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Psi(\varepsilon) = \int_a^b \Bigg\{ & \Bigg[\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x),u''(x))\cdot u'(x) - f(x,u(x),u'(x),u''(x)) \\ & +\frac{\partial f}{\partial s}(x,u(x),u'(x),u''(x))\Bigg]\lambda'(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,u(x),u'(x),u''(x))\lambda(x) \\ & +\frac{\partial f}{\partial s}(x,u(x),u'(x),u''(x))\lambda''(x)\Bigg\}\,\mathrm{d}x. \qquad \Box\end{aligned}$$

Aufgabe 12 (Kurven konstanter Krümmung) *Für eine Konstante $H \in (-1,+1)$ sei das Funktional F gegeben durch*

$$F(u) := \int_0^1 \Big(\sqrt{1+u'(x)^2} + Hu(x)\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass unter geeigneten Annahmen an die Integrationskonstanten für jede Lösung $u \in C^2((0,1);\mathbb{R})$ der Euler-Lagrange-Gleichung von F der Graph von u einen Kreisbogen mit Radius $R := \frac{1}{H}$ darstellt.

Beweis: Die 1. Variation von F berechnet sich zu

$$\delta F(u,\varphi) = \int_0^1 \Big[\frac{\partial f}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x))\Big]\varphi(x) = 0.$$

Nach Einsetzen von

$$f(x,z,p) = Hz + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}$$

ergibt dies

$$\delta F(u,\varphi) = \int_0^1 \left(H - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{u'(x)}{\left(1+u'(x)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Der Term $[\ldots]$ kann mit Hilfe von Lemma 2.1 umgeschrieben werden, so dass

$$\delta F(u,\varphi) = \int_0^1 \Big(H - \kappa(x)\Big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

gilt für beliebige Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty((0,1);\mathbb{R})$. Mit dem Fundamental-Lemma ergibt dies

$$\kappa(x) \equiv H \qquad \text{für alle } x \in (0,1). \tag{B.12}$$

Ein Kreisbogen mit Radius $R = 1/H$ erfüllt diese Gleichung. Wegen $|H| < 1$ ist dagegen die konstante Lösung $u' \equiv 0$ in $(0,1)$, bei der die Kurve ein Geradenstück wäre, ausgeschlossen.

Die Bedingung (B.12) entspricht einer Bedingung an $u'(x)$ und $u''(x)$, so dass mit u auch $u + \text{const}$ Lösung von (B.12) ist. Wir fordern daher noch an die Lösung

$$u(0) = u(1) = 0,$$

um einen Kreisbogen zu erhalten. $\square$

Aufgabe 13 (Schwache Ableitung) *In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass die Funktion $u(x) = |x|$ in $\mathbb{R}$ die schwache Ableitung $u'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ besitzt. Berechnen Sie, falls möglich, die 2. schwache Ableitung $u''(x)$.*

Lösung: Sei $v(x) = u'(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Analog zum Beispiel aus Kapitel 3 machen wir den folgenden Ansatz für die schwache Ableitung v':

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{+\infty} v'\varphi\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} v\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} v\varphi'\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} v\varphi'\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt wegen $u(0) = 0$

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{+\infty} v'\varphi\,\mathrm{d}x &= -\big[\varphi\big]_{-\infty}^{0} + \big[\varphi\big]_{0}^{\infty} \\ &= -2\varphi(0) = -2\delta_0[\varphi], \end{aligned}$$

wobei $\delta_z[\varphi] = \varphi(z)$ für einen Punkt $z \in \mathbb{R}$ die *Delta-Distribution* ist. Wir erhalten also nur eine distributionelle Ableitung, da δ_0 keine Funktion in $L^1(\Omega)$ ist, also $u \notin H^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. $\square$

Aufgabe 14 (Schwache Ableitung) *Prüfen Sie, ob der Raum* $(V, \|\cdot\|_V)$ *vollständig ist für*

$$V = C^1([0,1];\mathbb{R}), \qquad \|v\|_V := \left(\int\limits_0^1 |v(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 |v'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hinweis*: Betrachten Sie die Funktionen-Folge*

$$f_n(x) := \left(x^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 15 (Dualraum von $H_0^{1,2}(\Omega)$) *(a) Sei* $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. *Zeigen Sie für* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, *dass*

$$\alpha(u) := \int\limits_0^1 u(x_1, 0) x_1^2\,\mathrm{d}x$$

ein Element aus dem Dualraum von $H_0^{1,2}(\Omega)$ *definiert.*

(b) Sei $\Omega = (0, 2\pi)$. *Zeigen Sie, dass*

$$\beta(u) := \int\limits_0^{2\pi} u\Big(\frac{\sin(x)}{2}, \frac{\cos(x)}{2}\Big)\,\mathrm{d}x$$

ein Element aus dem Dualraum von $H_0^{1,2}(\Omega)$ *definiert.*

Beweis: (a) Die Linearität von α kann man elementar zeigen. Zum Beweis der Stetigkeit bemerken wir, dass nach der Hölder-Ungleichung

$$|\alpha(u)| \le \left(\int\limits_0^1 u^2(x_1, 0)\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 x_1^4\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Das 2. Integral rechts lässt sich durch eine Konstante abschätzen. Also folgt

$$|\alpha(u)| \le c\|u\|_{L^2(\Omega)} \le c\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}.$$

(b) Zum Beweis der Stetigkeit von β: Es gilt

$$\begin{aligned} |\beta(u)| \quad &\le \quad \left(\int\limits_0^{\pi} \Big|u\Big(\frac{\sin(x)}{2}, \frac{\cos(x)}{2}\Big)\Big|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 1^2\right)^h alf \\ &\le \quad \|u\|_{L^2(B_1(0))}\sqrt{2\pi}. \quad \Box \end{aligned}$$

Aufgabe 16 (Anwendung der Poincaré-Ungleichung) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *eine offene, beschränkte Menge mit Lipschitz-Rand. Für gegebenes* $f \in L^2(\Omega)$ *betrachten wir das elliptische Problem*

$$-\triangle u = f \qquad \text{in } \Omega, \tag{B.13}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{B.14}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung u von (B.13), (B.14) die a-priori-Abschätzung

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

erfüllt für eine positive Konstante C.

Beweis: Unter Verwendung des Satzes von Gauß lautet die schwache Formulierung von (B.13), (B.14)

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{B.15}$$

In (B.15) dürfen beliebige Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eingesetzt werden, wegen Satz 3.2 gilt dann aber (B.15) auch für beliebige Testfunktionen $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$.

Wählen wir speziell $\varphi := u$ in (B.15), so folgt mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le c_0\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

wobei beim Übergang zur 2. Zeile die Poincaré-Ungleichung verwendet wurde und c_0 die Konstante dieser Ungleichung ist.

Nach Kürzen erhalten wir

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le c_0\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Damit folgt, wieder unter Verwendung der Poincaré-Ungleichung,

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\le (c_0+1)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le c_0(c_0+1)\|f\|_{L^2(\Omega)}. \qquad \square\end{aligned}$$

Aufgabe 17 (Optimale Poincaré-Konstante) *In der Poincaré-Ungleichung kann die* optimale *Konstante durch Berechnung der Größe*

$$C_p = \inf\left\{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \,\middle|\, \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = 1\right\} \tag{B.16}$$

ermittelt werden. Man berechne für das reelle Intervall $\Omega = (0,a)$ (für gegebenes $a > 0$) die Konstante C_p explizit.

Hinweis: Eine Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $L^2(0,a)$ ist gegeben durch

$$e_k(x) := \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\Big(\frac{k\pi x}{a}\Big), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{B.17}$$

Beweis: Die Funktionen e_k sind auf $(0,a)$ klassisch differenzierbar und nehmen den Wert 0 am Rand von $(0,a)$ an. Zunächst verifizieren wir, dass (B.17) ein Orthonormalsystem bezüglich des L^2-Skalarproduktes

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert. Dazu bemerken wir die für reelle Konstanten A, B gültigen Integrationsformeln

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(Ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2Ax)}{4A}, \\
\int \cos^2(Ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2Ax)}{4A}, \\
\int \sin(Ax)\sin(Bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{\sin((A-B)x)}{2(A-B)} - \frac{\sin((A+B)x)}{2(A+B)}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für k, $l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$

$$\begin{aligned}
(e_k, e_k)_{L^2(\Omega)} &= \frac{2}{a}\int_0^a \sin^2\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{a}\left[\frac{a}{2} - \frac{\sin(2k\pi)a}{4\pi k}\right] = 1, \\
(e_k, e_l)_{L^2(\Omega)} &= \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = 0, \\
(e_k', e_k')_{L^2(\Omega)} &= \frac{2k^2\pi^2}{a^3}\int_0^a \cos^2\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2k^2\pi^2}{a^3}\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2k\pi x}{a}\right)a}{4k\pi}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{k^2\pi^2}{a^2}, \qquad \text{(B.18)} \\
(e_k', e_l')_{L^2(\Omega)} &= 0. \qquad \text{(B.19)}
\end{aligned}$$

Nach [2, Satz 7.15] bildet $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Basis des $L^2(0,a)$.

Jetzt setzen wir für $u \in H^{1,2}(\Omega)$ die Darstellung

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k e_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} (u, e_k)_{L^2(\Omega)} e_k$$

in (B.16) ein und finden wegen (B.19)

$$C_p = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 (e_k', e_k')_{L^2} \;\middle|\; u_k \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 = 1 \right\}. \qquad \text{(B.20)}$$

Wegen (B.18) ist ersichtlich, dass das Argument auf der rechten Seite von (B.20) minimal wird für $u_1 = 1$ und $u_k = 0$ für $k > 1$. Es gilt also

$$C_p = (e_1', e_1')_{L^2(\Omega)} = \frac{\pi^2}{a^2}. \quad \square$$

Aufgabe 18 *Sei X ein Banachraum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$ und ein $x \in X$. Man zeige, dass $x \in \overline{\operatorname{conv}\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}}$.*

Hinweis: Man kann ohne Beweis verwenden, dass jede konvexe abgeschlossene Menge schwach abgeschlossen ist. Dabei heißt eine Menge $M \subset X$ *schwach ab-*

geschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$ gilt $x \in M$.

Bemerkung: Aus Aufgabe 18 folgt, dass für eine schwach konvergente Folge $x_n \rightharpoonup x$ eine Konvexkombination der x_n stark gegen x konvergiert. Dies ist der *Satz von Mazur*.

Beweis: Sei $M := \operatorname{conv}\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Also ist M konvex. Wir zeigen, dass $\overline{M}$ konvex ist. Seien dazu $\tilde{x}, \tilde{y} \in \overline{M} \setminus M$. Somit existieren Folgen $(\tilde{x}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M$, $(\tilde{y}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\tilde{x}_j \to \tilde{x}$, $\tilde{y}_j \to \tilde{y}$ für $j \to \infty$. Aufgrund der Konvexität von M folgt für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$\lambda\tilde{x}_j + (1-\lambda)\tilde{y}_j \in M \qquad \text{für alle } 0 \le \lambda \le 1$$

und nach Bildung des starken Grenzwertes $j \to \infty$

$$\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\tilde{y} \in \overline{M} \qquad \text{für alle } 0 \le \lambda \le 1.$$

Dies beweist die Konvexität von $\overline{M}$. Nach dem Hinweis ist $\overline{M}$ also schwach folgenabgeschlosssen. $\square$

Aufgabe 19 *Sei X ein Banachraum und $M \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Weiter sei $f : M \to \mathbb{R}$ konvex und unterhalbstetig. Man beweise, dass f schwach unterhalbstetig ist, d.h. für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \rightharpoonup x$ gilt*

$$f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Hinweis: Für eine gegebene Folge $x_n \rightharpoonup x$ existiert nach Aufgabe 18 eine Teilfolge $(x_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$, die im *arithmetischen Mittel* stark konvergiert, d.h.

$$\Big(\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} x_{n_l}\Big)_m \to x \qquad \text{für } m \to \infty.$$

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$ und ein $x \in M$. Wir wählen eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus mit

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n). \tag{B.21}$$

Nach Aufgabe 18 gibt es eine Teilfolge $(x_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, so dass die Teilfolge der arithmetischen Mittel in der Norm gegen x konvergiert:

$$\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_{j_k}}\right)_m \to x \qquad \text{für } m \to \infty.$$

Da f konvex ist, ergibt sich

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f\Big(x_{n_{j_k}}\Big) \ge f\Big(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_{j_k}}\Big).$$

Wegen der Unterhalbstetigkeit von f folgt

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f\big(x_{n_{j_k}}\big) \ge \lim_{m\to\infty} f\Big(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_{j_k}}\Big) \ge f(x).$$

Nun gilt

$$\lim_{k\to\infty} f\big(x_{n_{j_k}}\big) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f\big(x_{n_{j_k}}\big),$$

da die Folge der arithmetischen Mittel mit gleichem Limes konvergiert, und wegen (B.21) folgt

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \lim_{k\to\infty} f\big(x_{n_{j_k}}\big) \geq f(x). \quad \square$$

Aufgabe 20 *Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Man zeige, dass die beschränkten Mengen in $C^{0,\beta}(K)$ präkompakt sind in $C^{0,\alpha}(K)$.*

Beweis: Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $C^{0,\beta}(K)$, d.h. $\|u_j\|_{C^{0,\beta}(K)} \leq c_0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und eine Konstante c_0. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli existiert ein $u \in C^0(K)$ mit $u_{j_k} \to u$ in $C^0(K)$ für eine Teilfolge $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $k \to \infty$. Für x, $y \in K$ betrachten wir den Ausdruck

$$I := \frac{|(u_{j_k} - u)(x) - (u_{j_k} - u)(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Sei $\delta > 0$.

<u>1. Fall</u>: $|x - y| \geq \delta$. Dann gilt

$$I \leq 2\delta^{-\alpha}\|u_{j_k} - u\|_{C^0(K)}.$$

<u>2. Fall</u>: $0 < |x - y| < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I &= \lim_{l\to\infty} \frac{|(u_{j_k} - u_{j_l})(x) - (u_{j_k} - u_{j_l}(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq \lim_{l\to\infty} \delta^{\beta-\alpha}\|u_{j_k} - u_{j_l}\|_{C^{0,\beta}(K)} \leq 2c_0\, \delta^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\|u_{j_k} - u_{j_l}\|_{C^{0,\alpha}(K)} \leq (1 + 2\delta^{-\alpha}) \underbrace{\|u_{j_k} - u\|_{C^0(K)}}_{\to 0 \text{ für } k\to\infty} + 2c_0 \underbrace{\delta^{\beta-\alpha}}_{\to 0 \text{ für } \delta\to 0}. \quad \square$$

Aufgabe 21 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt und $u \in L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$. Für $i \in \{1, \ldots, N\}$ und Einheitsvektoren $e_i := (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{iN})$ definieren wir die Differenzenquotienten*

$$\partial_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \qquad \text{für } x \in \Omega,\ h < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega).$$

Für eine Konstante $K \geq 0$ gelte

$$\|\partial_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K \qquad \text{für alle } h, \Omega' \subset\subset \Omega \text{ mit } \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) > h.$$

Zeigen Sie, dass gilt: $\partial_i u \in L^p(\Omega)$ und $\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$.

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und h klein genug. Mit der Hölder-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_\Omega \partial_i^h u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int\limits_\Omega \left|\partial_i^h u(x)\varphi(x)\right|\mathrm{d}x \\ &\leq \|\partial_i^h u\|_{L^p(\mathrm{supp}(\varphi))}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq K\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

Wegen $1 < p < \infty$ ist $H^{1,p}(\Omega)$ reflexiver Banachraum. Daher existiert der schwache Limes v_i von $(\partial_i^h u)_{h>0}$ für $h \searrow 0$ in $L^p(\Omega)$, d.h.

$$\int\limits_\Omega \partial_i^h u(x)\varphi(x) \to \int\limits_\Omega v_i(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für } h \searrow 0.$$

Wir zeigen, dass $v_i = \partial_i u$. Für $h < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(\varphi), \partial\Omega)$ gilt für $h \searrow 0$

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega v_i(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leftarrow \int\limits_\Omega \partial_i^h u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= -\int\limits_\Omega u(x)\partial_i^{-h}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\to -\int\limits_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Hier wurde bei der mittleren Identität diskret partiell integriert, was in Aufgabe 22(b) bewiesen wird. Beim letzten Grenzübergang wurde ferner verwendet, dass $\partial_i h\varphi \to \partial_i\varphi$ gleichmäßig in $\mathbb{R}^N$ gilt.

Wir haben also gezeigt, dass gilt

$$\int\limits_\Omega v_i(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgrund der Unterhalbstetigkeit der Norm (Satz von Tychonoff) gilt

$$\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{h\to 0} \|\partial_i^h u\|_{L^p(\Omega)},$$

also

$$\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K. \quad \square$$

Aufgabe 22 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ mit $1/p + 1/q = 1$ und $1 \leq p \leq \infty$. Der diskrete Differenzenquotient ∂_i^h sei wie in Aufgabe 21 definiert. Man beweise die folgenden Eigenschaften für $h \neq 0$:*

(a) Diskrete Produktregel:

Es gilt für fast alle $x \in \Omega$, $|h| < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$

$$\begin{aligned}\partial_i^h(uv)(x) &= (\partial_i^h u)(x)v(x) + u_h^i(x)\partial_i^h v(x) \\ &= (\partial_i^h u)(x)v_h^i(x) + u(x)\partial_i^h v(x),\end{aligned}$$

wobei für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gesetzt wurde

$$f_h^i(x) := f(x + he_i).$$

(b) Diskrete partielle Integration:

Falls u oder v kompakten Träger in Ω haben, so gilt für $|h| << 1$

$$\int_\Omega u(x)\partial_i^h v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \partial_i^h u(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{B.22}$$

Beweis: (a) Durch direkte Umformungen erhält man

$$\begin{aligned}
\partial_i^h(uv)(x) &= \frac{u(x+he_i)v(x+he_i)-u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+he_i)v(x+he_i)-u(x+he_i)v(x)}{h} \\
&\quad + \frac{u(x+he_i)v(x)-u(x)v(x)}{h} \\
&= u(x+he_i)\partial_i^h v(x) + v(x)\partial_i^h u(x).
\end{aligned}$$

Dies beweist die 1. Identität. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_i^h(uv)(x) &= \frac{u(x+he_i)v(x+he_i)-u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+he_i)v(x+he_i)-u(x)v(x+he_i)}{h} \\
&\quad + \frac{u(x)v(x+he_i)-u(x)v(x)}{h} \\
&= v(x+he_i)\partial_i^h u(x) + u(x)\partial_i^h v(x).
\end{aligned}$$

Falls nun $p = 1$ oder $p = \infty$ gilt, so folgt aus diesen Abschätzungen die Behauptung punktweise. Andernfalls verwenden wir die Hölder-Ungleichung und Aufgabe 21.

(b) Einsetzen der Definition des diskreten Differenzen-Quotienten in (B.22) ergibt nach Multiplikation mit h

$$\int_\Omega u(x)v(x) - u(x)v(x+he_i)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)v(x) - u(x-he_i)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$\int_\Omega u(x)v(x+he_i)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x-he_i)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die letzte Beziehung ist unmittelbar klar, wenn wir $\tilde{x} := x + he_i$ substituieren. $\square$

Aufgabe 23 *Man zeige, dass das Längenfunktional*

$$L(u) := \int_a^b \sqrt{1+u'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

unterhalbstetig ist bezüglich der schwachen Konvergenz in $H^{1,q}((a,b);\mathbb{R})$ für Exponenten $1 < q < \infty$, das Funktional aber nicht stetig ist bezüglich schwacher Konvergenz.

Beweis: Nach Korollar 4.1 ist L nicht schwach stetig, da

$$f(p) := \sqrt{1+p^2}$$

nicht linear ist.

Man kann elementar nachrechnen, dass $f(p)$ konvex ist. Dazu bemerken wir

$$f'(p) = p(1+p^2)^{-1/2}$$

und weiter

$$\begin{aligned} f''(p) &= (1+p^2)^{-1/2} - p^2(1+p^2)^{-3/2} \\ &= (1+p^2)^{-3/2}\Big[1+p^2-p^2\Big] = (1+p^2)^{-3/2} > 0. \end{aligned}$$

Dies beweist die Konvexität von f in p. Nach Aufgabe 19 (oder dem später bewiesenen Satz von Tonelli) ist L daher schwach unterhalbstetig in $H^{1,q}((a,b);\mathbb{R})$ für $1 < q < \infty$. $\square$

Aufgabe 24 *Sei $f = f(P) : \mathbb{R}^{MN} \to \mathbb{R}$ stetig und polykonvex. Zeigen Sie, dass f quasikonvex ist.*

Beweis: Sei $f = f(P) = g(T(P))$ für eine konvexe Funktion $g : \mathbb{R}^{\tau(M,N)} \to \mathbb{R}$. Sei $E \subset \Omega$ messbar, offen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_E f(P + D\varphi(x))\,\mathrm{d}x &= \int_E g(T(P + D\varphi(x)))\,\mathrm{d}x \\ &\geq |E| g\left(\frac{1}{|E|}\int_E T(P + D\varphi(x))\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned} \tag{B.23}$$

Dabei ergibt sich die Abschätzung mit der Jensenschen Ungleichung.

Nun gilt

$$\int_E T(P + D\varphi(x))\,\mathrm{d}x = T(P)|E|. \tag{B.24}$$

Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir zunächst den Fall $M = N = 2$ und es sei $\varphi \in C_0^\infty(E;\mathbb{R}^M)$. Dann ist die Behauptung (B.24) äquivalent mit

$$\int_E D\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ und } \int_E \det(P + D\varphi(x))\,\mathrm{d}x = |E|\det(P).$$

Die 1. Identität gilt offensichtlich. Zum Beweis der 2. Gleichung bemerken wir, dass für $v(x) := Px + \varphi(x)$

$$\det(Dv) = \operatorname{div}(v_1 D_2 v, -v_2 D_1 v_2),$$

also hängt $\int_E \det(Dv)\,\mathrm{d}x$ nur von den Werten von Dv an ∂E ab. Für allgemeines M und N schreiben wir wie gerade alle Minoren als Divergenzen.

Mit der nun bewiesenen Beziehung (B.24) folgt aus (B.23)

$$\begin{aligned} \int_E f(P + D\varphi(x))\,\mathrm{d}x &\geq |E| g\left(\frac{1}{|E|}\int_E T(P + D\varphi(x))\,\mathrm{d}x\right) \\ &= |E| g(T(P)) = E(f(P)). \quad \square \end{aligned}$$

Stichwortverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics Vol. 65, Academic Press, 1975

[2] H.W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer 1992

[3] A. Braides, *Homogenization of multiple integrals*, Oxford University Press, 1999

[4] K. Bhattacharya, *Microstructure of martensite. Why it forms and how it gives rise to the shape-memory-effect*, Oxford University Press 2003

[5] H. Buttazo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *One-dimensional variational problems*, Oxford University Press 1998

[6] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer New York 1989

[7] M.P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg 1983

[8] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS Publishing, 1998

[9] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1996

[10] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I+II*, Springer Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

[11] D. Gilbarg und N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2. Auflage, Springer 1998

[12] W. Kühnel, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 4. Auflage 2008

[13] R. Leis, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, Bonn 1998, siehe

`http://www-mathphys.iam.uni-bonn.de/~leis/web/pub/Partielle_Differentialgleichungen.pdf`

[14] J.C.C. Nitsche, *Vorlesungen über Minimalflächen*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer 1975

[15] I.K. Rana, *An Introduction to Measure and Integration*, Narosa Publishing, New Delhi 1997

[16] H. Sagan, *Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publishing 1992

[17] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proc. of the Centre for Math. Analysis, Vol. 3, ANU Canberra 1983

[18] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer 1990

[19] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer Graduate Texts in Mathematics 120, New York 1989