

Mathematik Vorkurs

Sommersemester
2018

01.03.2018

Bruchrechnung, Termumformungen
Gleichungen und Ungleichungen
Funktionen, Betragsfunktion
Trigonometrie und Kreisfunktionen
Potenzgesetze, Exponential- und
Logarithmusfunktion
Differenzialrechnung
Stammfunktionen
Analytische Geometrie der Ebene
Vektorrechnung

Prof. Dr. Dieter Kilsch
Fachbereich 2
Informatik, Technik und Wirtschaft



Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	iii
§ 1 Bruchrechnung	1
1.A Erweitern und Kürzen	1
1.B Algebra der Brüche	1
§ 2 Termumformungen	3
2.A Rechengesetze der reellen Zahlen	3
2.B Quadratische Terme und quadratische Ergänzung	4
2.C Summen- und Produktzeichen	5
2.D Definitionsbereich eines Terms	6
2.E Ganz-rationale / gebrochen-rationale Terme	7
2.F Horner-Schema	8
§ 3 Gleichungen und Ungleichungen	12
3.A Aussageform	12
3.B Gleichungen	12
3.C Quadratische Gleichungen	13
3.D Ungleichungen	14
3.E Gleichungen höheren Grades	16
§ 4 Funktionen	18
4.A Definition einer Funktion	18
4.B Betrag	19
4.C Abstand, Umgebung, Minimum, Maximum	21
§ 5 Trigonometrie	22
5.A Sinus und Kosinus	22
5.B Tangens und Kotangens	23
5.C Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck	25
5.D Trigonometrie am allgemeinen Dreieck	27
5.E Additionssätze	29
§ 6 Kreisfunktionen	32
6.A Graphen und Periode der Kreisfunktionen	32
6.B Gleichungen mit Kreisfunktionen	33
6.C Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz	34

§ 7 Exponential- und Logarithmusfunktionen	38
7.A Potenzen	38
7.B Exponentialfunktionen	39
7.C Eulersche Zahl	40
7.D Logarithmusfunktionen	40
7.E Logarithmisches Papier	43
7.F Doppelt-logarithmisches Papier	45
§ 8 Differenzialrechnung	47
8.A Ableitung einer Funktion	47
8.B Ableitungen elementarer Funktionen	49
8.C Kurvendiskussion	52
8.D Stammfunktionen	57
§ 9 Analytische Geometrie der Ebene	61
9.A Koordinatensystem	61
9.B Geraden in der Ebene	62
9.C Der Kreis	65
9.D Die Parabel	66
§ 10 Vektorrechnung	69
10.A Pfeile und Vektoren, Rechengesetze	69
10.B Kartesische Koordinaten und Komponentendarstellung	71
10.C Ebene Polarkoordinaten	73
10.D Das Skalarprodukt	74
10.E Das Kreuz- oder Vektorprodukt	77
Korrekturen	80
Abbildungsverzeichnis	81
Stichwortverzeichnis	83

Symbolverzeichnis

ggT	größter gemeinsamer Teiler: <i>größter Teilen beider Zahlen</i>	1
kgV	kleinstes gemeinsames Vielfache: <i>kleinstes Vielfache beider Zahlen</i>	1
$\sum_{i=m}^n a_i$	Summe	5
$\prod_{i=m}^n a_i$	Produkt	5
$\mathbb{D}(T)$	Definitionsmenge des Terms T	10
$A \cap B$	Durchschnitt: <i>ihre Elemente gehören zu A und B</i>	10
$A \setminus B$	Differenzmenge: <i>ihre Elemente gehören zu A, aber nicht zu B</i>	10
\mathbb{L}	Lösungsmenge	10
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B: <i>jedes Elemente aus A liegt auch in B</i>	15
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen	15
\mathbb{D}_f	Definitionsbereich der Funktion f	15
\mathbb{W}_f	Wertevorrat der Funktion f	15
$f(\mathbb{D}_f)$	Wertebereich der Funktion f	15
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall	16
(a, b)	offenes Intervall	16
$]a, b[$	offenes Intervall	16
$\mathbb{R}_{>0}$	Menge der positiven reellen Zahlen	16
$\mathbb{Z}_{\geq -5}$	Menge der ganzen Zahlen größer gleich -5	16
\mathbb{Q}^\times	Menge der Brüche ohne Null	16
$ a $	Betrag von der Zahl a	16
$A \cup B$	Vereinigungsmenge: <i>ihre Elemente gehören zu A oder B</i>	17
$\min(a, b)$	Minimum der Zahlen a und b	17
$\max(a, b)$	Maximum der Zahlen a und b	17
rad	Radian	18
$d(P_1, P_2)$	Abstand der Punkte P_1 und P_2	49
P_1P_2	Gerade durch die Punkte P_1P_2	49
arg	Argumentfunktion	50

§ 1 Bruchrechnung

1.A Erweitern und Kürzen

Beispiel 1.1 Der *größte gemeinsame Teiler* und das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier natürlicher Zahlen - diese Begriffe sind selbsterklärend - werden durch eine *Primzahlzerlegung* berechnet: Aus $36 = 2^2 \cdot 3^2$ und $24 = 2^3 \cdot 3^1$ folgen

- $\text{ggT}(24, 36) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$
- $\text{kgV}(24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Regel 1.2 (Erweitern und Kürzen)

- Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit der gleichen, von Null verschiedenen Zahl multipliziert werden.
- Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch die gleiche, von Null verschiedene Zahl dividiert werden.
- Ein Bruch wird vollständig gekürzt, wenn er durch den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner gekürzt wird.
- Ein Bruch ist vollständig gekürzt, wenn der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner 1 ist.

In einem Ergebnis muss jeder Bruch gekürzt und der Nenner positiv sein.

Beispiel 1.3

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{-15}{10} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{15}{-12} = -\frac{5}{4}.$$

1.B Algebra der Brüche

Regel 1.4 (Hauptnenner) Der Hauptnenner mehrerer Brüche ist das kgV seiner Nenner. Brüche können auf ihren gemeinsamen Hauptnenner erweitert werden.

Regel 1.5 (Addition und Subtraktion) Zwei Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem sie zunächst auf ihren Hauptnenner erweitert werden und anschließend die Zähler addiert bzw. subtrahiert werden. Das Ergebnis muss gekürzt werden.

Beispiel 1.6

$$\frac{7}{12} + \frac{17}{9} - \frac{3}{5} - \frac{1}{15} = \frac{105 + 340 - 108 - 12}{180} = \frac{325}{180} = \frac{65}{36}$$

Regel 1.7 (Multiplikation) Zwei Brüche werden multipliziert, indem das Produkt der Zähler durch das Produkt des Nenners dividiert wird. Das Ergebnis muss gekürzt werden:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Beispiel 1.8
$$\frac{3}{4} \cdot \frac{14}{9} = \frac{3 \cdot 14}{4 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}$$

Regel 1.9 (Division) *Zwei Brüche werden dividiert, indem der Dividend mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert wird. Das Ergebnis muss gekürzt werden.*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Beispiel 1.10
$$\frac{3}{4} : \frac{15}{22} = \frac{3}{4} \cdot \frac{22}{15} = \frac{3 \cdot 22}{4 \cdot 15} = \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 5} = \frac{11}{10}$$

Regel 1.11 (Doppelbruch) *Ein Doppelbruch wird berechnet, indem der Zähler durch den Nenner dividiert wird.*

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

§ 2 Termumformungen

2.A Rechengesetze der reellen Zahlen

Definition 2.1 (Term) Ein mathematischer Term ist ein sinnvoller, also ein ausrechenbarer oder entscheidbarer mathematischer Ausdruck, der neben Zahlen und Operationszeichen auch Variable enthalten kann.

Bei der Umformung mathematischer Terme dürfen alle Rechenregeln der reellen Zahlen angewandt werden; und nur diese!

Regel 2.2 (Wichtige Gesetze reeller Zahlen)

$$a + (-b) = a - b \quad (2.1)$$

$$a \cdot (-b) = -a \cdot b = (-a) \cdot b \quad (2.2)$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{Kommutativgesetz}) \quad (2.3)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{Distributivgesetz}) \quad (2.4)$$

Beispiel 2.3

$$\begin{aligned} 9y^2 + 3yz &= 3y \cdot 3y + 3y \cdot z = 3y \cdot (3y + z) \\ 72x^2 - 48xy &= 24x \cdot 3x - 24x \cdot 2y = 24x \cdot (3x - 2y) \end{aligned}$$

Klammerregeln entstehen im wesentlichen durch Anwenden des Distributiv- und Kommutativgesetzes.

Regel 2.4 (Binomische Formeln)

$$(a) \quad \underline{(a + b)^2} = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b = a^2 + ba + ab + b^2 = \underline{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$(b) \quad \underline{(a - b)^2} = (a - b) \cdot (a - b) = (a - b) \cdot a - (a - b) \cdot b = a^2 - ba - ab + b^2 = \underline{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$(c) \quad \underline{(a + b) \cdot (a - b)} = (a + b) \cdot a - (a + b) \cdot b = a^2 + ba - ab - b^2 = \underline{a^2 - b^2}$$

Auf der ersten binomischen Formel beruht der von Konrad Zuse in seiner Z3 eingebaute Algorithmus zur Berechnung einer Quadratwurzel. Die Z3 war als erster elektronischer Rechner 1941 einsatzbereit.

Das wesentliche Problem beim Ausnutzen der binomischen Formeln besteht im Erkennen einer rechten Seite in einem gegebenen Term.

Beispiel 2.5

$$\begin{aligned} x^2 + 14x + 49 &= (x + 7)^2 \\ \alpha^2 - 24\alpha + 144 &= (\alpha - 12)^2 \\ x^2 - 5 &= (x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Beispiel 2.6

$$\begin{aligned}
& (x-y) \cdot (2x-4y)^2 - (12xy-4x^2) \cdot (2y-x) \\
= & (x-y) \cdot 2^2 \cdot (x-2y)^2 - 4x \cdot (3y-x) \cdot (2y-x) \\
= & (x-y) \cdot 4(x-2y)^2 + 4x \cdot (3y-x) \cdot (x-2y) \\
= & 4(x-2y) \cdot ((x-y) \cdot (x-2y) + x \cdot (3y-x)) \\
= & 4(x-2y) \cdot (x^2 - 2xy - xy + 2y^2 + 3xy - x^2) \\
= & 4(x-2y) \cdot (2y^2) \\
= & 8y^2 \cdot (x-2y)
\end{aligned}$$

2.B Quadratische Terme und quadratische Ergänzung

Der *Hauptkoeffizient* eines quadratischen Terms $ax^2 + bx + c$ ist der Koeffizient bei x^2 , also a . Aus

$$(x-a) \cdot (x-b) = x \cdot (x-b) - a \cdot (x-b) = x^2 - xb - ax + ab = \underline{x^2 - (a+b) \cdot x + ab}.$$

folgt der

Satz 2.7 (Satz von Vieta¹)

$$(x-a) \cdot (x-b) = x^2 + p \cdot x + q \iff p = -(a+b) \wedge q = ab$$

In einem quadratischen Polynom mit Hauptkoeffizient 1 ist das Negative der Summe der beiden Nullstellen gleich dem linearen Koeffizienten und ihr Produkt gleich dem konstanten Koeffizienten.

Beispiel 2.8

(a)

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3) \cdot (x-4)$$

(b)

$$x^2 + 4x - 21 = (x+7) \cdot (x-3)$$

Im folgenden soll der Term $x^2 + bx + c$ ohne linearen Summanden geschrieben werden. Gesucht sind also γ und δ mit

$$x^2 + bx + c = (x + \gamma)^2 + \delta$$

Diese Formel wird später benutzt, um x aus einer quadratischen Gleichung zu berechnen. Zur Bestimmung von γ und δ berechnen wir die rechte Seite nach der binomischen Formel:

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2x\gamma + \gamma^2 + \delta$$

und vergleichen beide Seiten:

$$b = 2\gamma \quad \text{und} \quad c = \gamma^2 + \delta.$$

Dies lösen wir nach γ und δ auf:

$$\gamma = \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad \delta = c - \gamma^2 = c - \frac{b^2}{4}.$$

Wir erhalten also

¹F. Vieta, fr. Mathematiker, 1540-1630

Regel 2.9 (Quadratische Ergänzung)

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) \quad (2.5)$$

Der Term $\frac{b^2}{4}$ heißt quadratische Ergänzung. Wir erweitern diese Formel auf Terme mit beliebigen Hauptkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \underline{ax^2 + bx + c} &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) \stackrel{(2.5)}{=} a \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right) \\ &= \underline{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Beispiel 2.10

$$x^2 + 5x + 7 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 7 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

2.C Summen- und Produktzeichen

Zur Abkürzung von Summen und Produkten werden die großen griechischen Buchstaben Sigma und Pi benutzt:

Definition 2.11

(a)

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Dabei sind i der Laufindex, m der Summationsanfang und n das Summationsende. Addiert werden also alle Zahlen a_m, \dots, a_n .

(b)

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

mit dem Laufindex i , dem Produktanfang m und dem -ende n . Multipliziert werden also alle Zahlen a_m, \dots, a_n .

Beispiel 2.12

(a)

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 (= 55)$$

(c)

$$\sum_{i=2}^6 2^i = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 (= 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124)$$

(d)

$$\sum_{i=1}^3 2^{-i} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(= \frac{7}{8} \right)$$

(e)

$$\prod_{i=0}^4 2^i = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 (= 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 = 1024)$$

(f)

$$\prod_{i=1}^5 2^{-i} = \prod_{i=1}^5 \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \left(= \frac{1}{32768} \right)$$

Die beiden Produkte können mit Hilfe der Potenzgesetze zu Summen im Exponenten umgeschrieben werden:

Bemerkung 2.13

(a)

$$\prod_{i=0}^4 2^i = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{0+1+2+3+4} = 2^{\sum_{i=0}^4 i} (= 2^{10})$$

(b)

$$\prod_{i=1}^5 2^{-i} = 2^{-1-2-3-4-5} = 2^{-\sum_{i=1}^5 i} (= 2^{-15})$$

Beim Zusammenfassen von Summen (oder Produkten) ist es häufig notwendig, den Laufindex einer Summe oder eines Produkts zu verändern.

Bemerkung 2.14 (Indexverschiebung) Alle Summen der folgenden Zeile haben die gleiche Bedeutung:

$$\sum_{i=0}^5 a_i = \sum_{i=1}^6 a_{i-1} = \sum_{k=-5}^0 a_{k+5} \quad (= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

Bei einer Indexverschiebung wird der Laufindex am Summenzeichen erhöht (verringert) und im zu summierenden Ausdruck um den gleichen Wert verringert (erhöht). Eine Änderung des Namens des Laufindex ist ebenfalls erlaubt. Die Indexverschiebung ist in gleicher Weise beim Produktzeichen möglich.

2.D Definitionsbereich eines Terms

Definition 2.15 (Definitionsbereich) Der Definitionsbereich eines Terms enthält alle reellen Zahlen, für die der Term zu einem sinnvollen Ausdruck wird.

Der Definitionsbereich wird in der Regel eingeschränkt durch

- Definitionsbereich von im Term auftretenden Funktionen (Wurzel, Logarithmus, ...)
- Brüche im Term: Der Nenner darf nicht Null sein.
- anwendungsbedingt ungültige Bereiche. Zum Beispiel kann das Volumen eines Körpers nie negativ sein.

Beispiel 2.16 Der Term $\sqrt{x+3}$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} = [-3, \infty)$.

2.E Ganz-rationale / gebrochen-rationale Terme

Definition 2.17

(a) Ein ganz-rationaler Term oder Polynom hat die Form

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n .$$

Ist $a_n \neq 0$, so ist n der Grad und a_n der Hauptkoeffizient des Terms. Ein Term $ax+b$ des Grades 1 heißt auch linear.

(b) Ein gebrochen-rationaler Term ist ein Bruch mit ganz-rationalem Zähler und Nenner. Er hat also die Form

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n}$$

Bei einem echt gebrochen-rationalem Term ist der Nennergrad größer als der Zählergrad ($n > m$).

Aus einem unecht gebrochen-rationalem Term kann durch eine Polynomdivision ein ganzer Summand abgepalten werden:

Regel 2.18 (Polynomdivision) Ein gebrochen-rationaler Term $\frac{p(x)}{q(x)}$ kann immer als Summe eines ganz-rationalem Terms $g(x)$ und eines echt gebrochen-rationalem Terms $\frac{r(x)}{q(x)}$ geschrieben werden:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad \text{oder} \quad p(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad \text{mit} \quad \text{grad } r < \text{grad } q .$$

Diese Zerlegung erhält man mit Hilfe der Polynomdivision:

Beispiel 2.19 Der Term $\frac{x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + 3}$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 + 5) : (x^2 + 3) = x + 2 \quad \text{Rest } -3x - 1 \\ \underline{x^3 + 3x^2} \\ 2x^2 - 3x \\ \underline{2x^2 + 6} \\ -3x - 1 \end{array}$$

Hiermit folgen

$$x^3 + 2x^2 + 5 = (x + 2)(x^2 + 3) - 3x - 1$$

und

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + 3} = x + 2 - \frac{3x + 1}{x^2 + 3} .$$

Bemerkung 2.20 (Division durch Linearfaktor ohne Rest) Ein Polynom $p(x)$ ist genau dann durch den Linearfaktor $x - a$ (ohne Rest) teilbar, wenn a eine Nullstelle von $p(x)$ ist: Mit $q(x) = x - a$ folgt aus Regel 2.18 wegen $r(x) = 0$

$$p(x) = g(x) \cdot (x - a) .$$

Setzen wir hier $x = a$, so folgt $p(a) = g(a) \cdot 0 = 0$

Beispiel 2.21

(a) Die Berechnung

$$\begin{array}{r}
 (x^2 + x - 110) : (x + 11) = x - 10 \\
 \underline{x^2 + 11x} \\
 -10x - 110 \\
 \underline{-10x - 110} \\
 0
 \end{array}$$

liefert für den Term $x^2 + x - 110$ die Zerlegung

$$x^2 + x - 110 = (x + 11) \cdot (x - 10)$$

in Linearfaktoren. Er besitzt also die Nullstellen -11 und 10.

(b) [?, 1.3.3] Der Term

$$\frac{(2x^2 + 44x + 242)(180 - 18x)}{24x^4 + 24x^3 - 2640x^2}$$

hat wegen

$$24x^4 + 24x^3 - 2640x^2 = 24x^2(x^2 + x - 110) \stackrel{a)}{=} 24x^2 \cdot (x + 11) \cdot (x - 10)$$

den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid 0 = 24x^4 + 24x^3 - 2640x^2\} = \mathbb{R} \setminus \{-11, 0, 10\}$. Wegen

$$2x^2 + 44x + 242 = 2 \cdot (x^2 + 22x + 121) = 2 \cdot (x + 11)^2$$

ist der Term für $x \in \mathbb{D}$ äquivalent zu

$$\frac{2(x + 11)^2 \cdot 18(10 - x)}{24x^2 \cdot (x + 11) \cdot (x - 10)} = -\frac{36(x + 11)}{24x^2} = -\frac{3(x + 11)}{2x^2}.$$

(c) [?, 1.3.3] Der Term

$$\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}}$$

hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq -y\}$. Wir bringen Zähler und Nenner zunächst auf ihre Hauptnenner und berechnen weiter:

$$\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}} = \frac{\frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2}}{\frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3}} = \frac{(y - x)(y + x)xy}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} = xy \frac{y - x}{x^2 - xy + y^2}$$

2.F Horner-Schema

Das Horner-Schema bietet ein einfaches Rechenschema zur Berechnung der Werte eines Polynoms und zum Abspalten eines Linearfaktors. Zunächst wollen wir anhand des obigem Beispiels einen Wert eines Polynoms zu berechnen. Aus

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x^3 - x^2 - 14x + 24 = 1x^3 - 1x^2 - 14x + 24 = (1x - 1)x^2 - 14x + 24 \\
 &= ((1x - 1)x - 14)x + 24
 \end{aligned}$$

leiten wir allgemein das Horner-Schema her:

Verfahren 2.22 (Polynomberechnung mit dem Horner-Schema)

Horner-Schema						
	1		-1	-14	24	1
			+	+	+	
			$1x_0$	$(1x_0 - 1)x_0$	$((1x_0 - 1)x_0 - 14)x_0$	
x_0	1	$\cdot x_0 \nearrow$	$1x_0 - 1$	$(1x_0 - 1)x_0 - 14$	$((1x_0 - 1)x_0 - 14)x_0 + 24$	2

Wir beginnen mit dem Eintragen der Koeffizienten des Polynoms in absteigender Reihenfolge in der ersten Zeile, lassen die erste Spalte aber frei. In den weiteren Zeilen werten wir das Polynom aus.

Hierzu schreiben wir das auszuwertende Argument x_0 in die erste Spalte und beginnen mit dem Herunterholen des Hauptkoeffizienten in die erste Rechenzelle. Dann multiplizieren wir den Wert der ersten Rechenzelle 1 mit x_0 und addieren den Koeffizienten in der zweiten Kopfzelle -1 und erhalten so den Wert der zweiten Rechenzelle $1x_0 - 1$. Anschließend multiplizieren wir diesen Wert mit x_0 und addieren den Koeffizienten in der dritten Kopfzelle -14 und erhalten so den Wert der zweiten Rechenzelle $(1x_0 - 1)x_0 - 14$. So verfahren wir weiter und erhalten in der letzten Rechenzelle das Ergebnis.

Zur Veranschaulichung berechnen wir den Wert des Polynoms an der Stelle $x_0 = 5$ und erhalten aus dem Horner-Schema $p(5) = 54$. Links habe ich die eben eingeführte Darstellung benutzt, rechts die übliche Kurzdarstellung ohne Notation der jeweiligen Zwischenergebnisse.

Horner-Schema					
	1		-1	-14	24
			+	+	+
			5	20	30
5	1	$\cdot 5 \nearrow$	4	6	54

Horner-Schema				
	1	-1	-14	24
5	1	4	6	54

Beispiel 2.23

Wir berechnen die Werte des obigen Polynoms für die Nullstellenkandidaten bis wir drei Nullstellen gefunden haben und erhalten als Ergebnis $x_0 = 2, 3, -4$.

Betrachten wir die Zeile zu $x_0 = 2$ genauer, so stellen wir fest, dass die ersten drei Zellen die Koeffizienten des Polynoms

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x - 2} = x^2 + x - 12$$

enthalten.

Das Horner-Schema bietet also nicht nur ein Rechenschema zur Auswertung eines Polynoms sondern auch ein Rechenschema zum Berechnen einer Polynomdivision bei linearem Divisor. Dies wird im folgenden Verfahren nochmals erläutert und festgehalten:

Horner-Schema				
	1	-1	-14	24
1	1	0	-14	10
-1	1	-2	-12	36
2	1	1	-12	0
-2	1	-3	-8	40
3	1	2	-8	0
-3	1	-4	-2	30
4	1	3	-2	16
-4	1	-5	6	0

Verfahren 2.24 (Abspalten eines Linearfaktors mit dem Horner-Schema)

Allgemein gilt für das hier betrachtete Polynom:

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - 14x + 24) : (x - x_0) = x^2 + (x_0 - 1)x + ((x_0 - 1)x_0 - 14) \\ \underline{x^3 - x_0x^2} \\ (x_0 - 1)x^2 - 14x \\ \underline{(x_0 - 1)x^2 - (x_0 - 1)x_0x} \\ ((x_0 - 1)x_0 - 14)x + 24 \\ \underline{((x_0 - 1)x_0 - 14)x - ((x_0 - 1)x_0 - 14)x_0} \\ ((x_0 - 1)x_0 - 14)x_0 + 24 \end{array}$$

oder

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x - x_0} = x^2 + (x_0 - 1)x + ((x_0 - 1)x_0 - 14) + \frac{((x_0 - 1)x_0 - 14)x_0 + 24}{x - x_0}.$$

¹Kopfzeile, Kopfzellen

²Rechenzeile, Rechenzellen

Die Koeffizienten des Polynoms der rechten Seite und der Zähler werden im Horner-Schema abgelesen. Ist x_0 eine Nullstelle, so ist der Bruch null.

Beispiel 2.25 Für die in obigem Schema berechneten Werte erhalten wir:

(a)

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x - 1} = x^2 - 14 + \frac{10}{x - 1}$$

(b)

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x + 1} = x^2 - 2x - 12 + \frac{36}{x + 1}$$

(c)

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x - 2} = x^2 + x - 12$$

(d)

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x + 2} = x^2 - 3x - 8 + \frac{40}{x + 2}$$

(e)

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x - 3} = x^2 + 2x - 8$$

(f)

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x + 3} = x^2 - 4x - 2 + \frac{30}{x + 3}$$

(g)

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x - 4} = x^2 + 3x - 2 + \frac{16}{x - 4}$$

(h)

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x + 4} = x^2 - 5x + 6$$

Durch mehrmaliges Anwenden des Horner-Schema erhalten wir auch das Ergebnis einer Division eines Polynoms durch eine Potenz eines Linearfaktors. Dies wird an einem Beispiel gezeigt.

Beispiel 2.26 (Division eines Polynoms durch eine Potenz eines Linearfaktors)

Wir erhalten, indem wir (2.25 (d)) durch $x + 2$ dividieren,

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 - 3x - 8}{x + 2} + \frac{40}{(x + 2)^2}.$$

Die Zähler der rechten Seite stimmen mit den Werten der Rechenzeile des Horner-Schemas überein.

Zur weiteren Berechnung müssen wir $x^2 - 3x - 8$ durch $x + 2$ dividieren. Das Ergebnis erhalten wir mit dem rechts stehenden Horner-Schema, dessen Kopfzeile gleich der Rechenzeile des vorherigen Schemas ist. Damit folgen

$$\frac{x^2 - 3x - 8}{x + 2} = x - 5 + \frac{2}{x + 2}$$

Horner-Schema				
	1	-1	-14	24
-2	1	-3	-8	40

Horner-Schema			
	1	-3	-8
-2	1	-5	2

und

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{(x+2)^2} = x - 5 + \frac{2}{x+2} + \frac{40}{(x+2)^2}.$$

Die beiden Berechnungen mit dem Horner-Schema können wir zusammenfassen, indem wir mit der Rechenzeile des ersten Schritts als Kopfzeile weiter rechnen.

<i>Horner-Schema</i>				
	1	-1	-14	24
-2	1	-3	-8	40
-2	1	-5	2	

In einem dritten Schritt kann dann $\frac{x-5}{x+2} = 1 - \frac{7}{x+2}$ berechnet werden. Insgesamt ergibt sich

$$\frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{(x+2)^3} = 1 - \frac{7}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{40}{(x+2)^3}$$

oder

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x+2)^3 - 7(x+2)^2 + 2(x+2) + 40.$$

Alle Zähler bzw. Koeffizienten können aus dem Horner-Schema abgelesen werden!

<i>Horner-Schema</i>				
	1	-1	-14	24
-2	1	-3	-8	40
-2	1	-5	2	
-2	1	-7		

§ 3 Gleichungen und Ungleichungen

3.A Aussageform

Definition 3.1 (Aussageform)

- (a) Eine Gleichung besteht aus 2 Termen, die durch „=“ verbunden sind. Die beiden Terme werden gleichgesetzt.
- (b) Eine Ungleichung besteht aus 2 Termen, die durch „<“, „≤“, „≥“ oder „>“ verglichen werden.
- (c) Eine Aussageform (in x) ist eine Gleichung oder eine Ungleichung (in x).
- (d) Die Definitionsmenge der Aussageform ist die Menge aller reellen Zahlen, für die die Aussageform sinnvoll ist. Sie besteht aus denjenigen reellen Zahlen, die in den Definitionsmengen jedes der beiden Terme enthalten sind (Durchschnitt): $\mathbb{D}(T_1 = T_2) = \mathbb{D}(T_1) \cap \mathbb{D}(T_2)$.

Beispiel 3.2 Die Gleichung $\frac{1}{x-3} = \frac{x}{(x-5)^2}$ und die Ungleichung $\frac{1}{x-3} < \frac{x}{x-5}$ haben die Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$.

Definition 3.3 (Lösungsmenge) Die Lösungsmenge einer Aussageform enthält alle Elemente des Definitionsbereichs, die die Aussageform erfüllen.

Beispiel 3.4 Die Gleichung $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1\}$.

3.B Gleichungen

Das Ziel besteht natürlich darin, die Lösungsmenge zu berechnen. Hierzu werden Manipulationen angegeben, die die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern. Diese Manipulationen müssen zielorientiert angewandt werden.

Die Gleichung kann als Balkenwaage veranschaulicht werden, die in jeder Waagschale einen Term enthält. Welche Manipulationen bringen die Waage nicht aus dem Gleichgewicht?

Regel 3.5 (Äquivalenzumformungen einer Gleichung)

Folgende Manipulationen ändern die Lösungsmenge einer Gleichung nicht:

- (a) Addition oder Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten.
- (b) Multiplikation oder Division beider Seiten mit oder durch einen von Null verschiedenen Term.
- (c) Potenzieren mit ungeradem Exponenten.
- (d) n -tes Wurzelziehen mit ungeradem Exponenten.

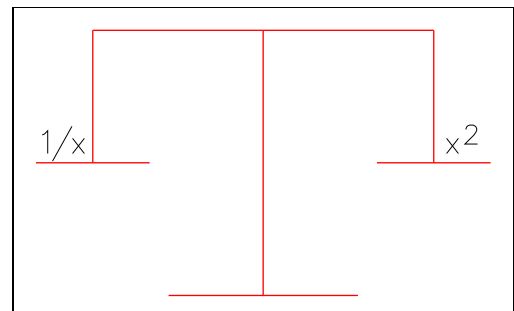


Abb. 3.1: Gleichgewicht

Beispiel 3.6 [?, S. 25] Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{(a-b)x}{2x+a} + \frac{(a+b)x}{2x-a} = \frac{(b-a)x^2 + 10a^2x}{4x^2 - a^2} \quad (3.1)$$

Lösung: Wegen $4x^2 - a^2 = (2x+a)(2x-a)$ ist der Definitionsbereich

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{a}{2} \wedge x \neq -\frac{a}{2} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{a}{2} \right\}.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit dem gemeinsamen Hauptnenner $(2x+a)(2x-a) = 4x^2 - a^2$:

$$\begin{aligned} (3.1) &\iff (a-b)x(2x-a) + (a+b)x(2x+a) = (b-a)x^2 + 10a^2x \\ &\iff x(2ax - a^2 - 2bx + ab + 2ax + a^2 + 2bx + ab) = x(bx - ax + 10a^2) \\ &\iff x(4ax + 2ab) = x(bx - ax + 10a^2) \quad | : x \\ &\iff x = 0 \vee 4ax - bx + ax = 10a^2 - 2ab \\ &\iff x = 0 \vee x(5a - b) = 2a(5a - b) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die weitere Lösung erfordert eine Fallunterscheidung:

1. Fall ($5a = b$):

$$\begin{aligned} (3.2) &\iff x = 0 \vee x \cdot 0 = 2a \cdot 0 \\ &\iff x = 0 \vee 0 = 0 \quad \text{immer erfüllt} \\ &\iff x \in \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{a}{2} \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt $\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{a}{2} \right\}$.

2. Fall ($5a \neq b$): Gleichung (3.2) wird durch $5a - b$ dividiert:

$$(3.2) \iff x = 0 \vee x = 2a$$

Wegen des Definitionsbereichs $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{a}{2} \right\}$ treten nochmals zwei Fälle auf:

(b1) $a = 0$: $\mathbb{L} = \emptyset$,

(b2) $a \neq 0$: $\mathbb{L} = \{0, 2a\}$.

3.C Quadratische Gleichungen

Regel 3.7 Für $a \geq 0$ gilt: $x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$

Unter der Voraussetzung $p^2 \geq 4q$ lösen wir die quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \quad \left| + \frac{p^2}{4} - q \right. \\ \iff x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} &= \frac{p^2}{4} - q \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\ \iff x + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ \iff x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{aligned}$$

Dies fassen wir zusammen:

Regel 3.8 (p-q-Formel) Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p^2 \geq 4q$ hat die Lösung

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Regel 3.9 (Quadrieren einer Gleichung) Das Quadrieren einer Gleichung ist eine nicht-äquivalente Umformung:

$$x = a \implies x^2 = a^2$$

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht. Es gilt vielmehr

$$x^2 = a^2 \iff x = \pm\sqrt{a^2} = \pm|a| \iff x = a \vee x = -a$$

Enthält eine Berechnung eine nicht-äquivalente Umformung, so müssen alle am Ende gefundenen Lösungen zur Probe in einer Gleichung vor der ersten nicht-äquivalenten Umformung verifiziert werden.

Beispiel 3.10

$$-\frac{2x}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}} - \sqrt{x+1} \tag{3.3}$$

hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$. Wir beginnen mit der Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner $\sqrt{2}\sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned} (3.3) \iff & -2\sqrt{2}x = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{2}(x+1) & | +\sqrt{2}(x+1) \\ \iff & \sqrt{2}(1-x) = \sqrt{x^2-1} & |^2 \\ \implies & 2(1-x)^2 = x^2 - 1 \\ \iff & 2x^2 - 4x + 2 = x^2 - 1 & | -(x^2 - 1) \\ \iff & x^2 - 4x + 3 = 0 & | \text{p-q-Formel} \\ \iff & x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \\ \iff & x = 3 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Die beiden Werte müssen durch eine Probe verifiziert werden. Wir setzen sie in der ersten Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \text{Probe: } x = 3: & \quad \text{l.S.: } -3; \quad \text{r.S.: } 1 - 2 = -1 \\ x = 1: & \quad \text{l.S.: } -\sqrt{2}; \quad \text{r.S.: } -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathbb{L} = \{1\}$. Die Tatsache, dass die linke Seite für $x = 3$ vor dem Quadrieren negativ ist, kann als Hinweis dafür verstanden werden, dass diese Zahl keine Lösung ist. \diamond

3.D Ungleichungen

Regel 3.11 (Ordnungsrelationen) Für reelle Zahlen a, b, c, d gelten

$$\begin{aligned} (a) \quad & a < b \iff a + c < b + c \\ & a < b \iff a - c < b - c \\ (b) \text{ Für } c > 0 \text{ gelten:} \quad & a < b \iff a \cdot c < b \cdot c \\ & a < b \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{aligned}$$

Multiplikation mit und Division durch eine positive Zahl erhalten die Ordnungsrelation.

$$\begin{aligned} (c) \text{ Für } c < 0 \text{ gelten:} \quad & a < b \iff a \cdot c > b \cdot c \\ & a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{aligned}$$

Multiplikation mit und Division durch eine negative Zahl kehren die Ordnungsrelation um.

$$(d) \text{ Haben } a \text{ und } b \text{ dasselbe Vorzeichen } (a \cdot b > 0), \text{ so gilt:} \quad a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$(e) \text{ Haben } a \text{ und } b \text{ verschiedene Vorzeichen } (a \cdot b < 0), \text{ so gilt:} \quad a < b \iff \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$(f) \quad a < b \wedge c < d \implies a + c < b + d$$

Analoge Regeln gelten für die Relationen „größer gleich“ und „kleiner gleich“.

Zum Nachweis von (4) und (5) multiplizieren wir nach den Regeln (2) und (3) $a < b$ mit $\frac{1}{ab}$.
Für (6) addieren wir nach (1) zur ersten Gleichung c und zur zweiten b und erhalten

$$a + c < b + c \quad \text{und} \quad c + b < d + b, \quad \text{also} \quad a + c < d + b. \quad \diamond$$

Regel 3.12 (Äquivalenzumformungen für Ungleichungen)
die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht:

Folgende Manipulationen ändern

- (a) Addition oder Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten.
- (b) Multiplikation oder Division beider Seiten mit oder durch einen positiven Term.
- (c) Potenzieren mit ungeradem positivem Exponenten.
- (d) n -tes Wurzelziehen mit ungeradem positivem Exponenten.
- (e) Übergang zum Kehrwert bei verschiedenen Vorzeichen der Terme.

Folgende Manipulationen kehren die Ordnungsrelation um:

- (a) Multiplikation oder Division beider Seiten mit einem oder durch einen negativen Term.
- (b) Übergang zum Kehrwert bei gleichen Vorzeichen der Terme.

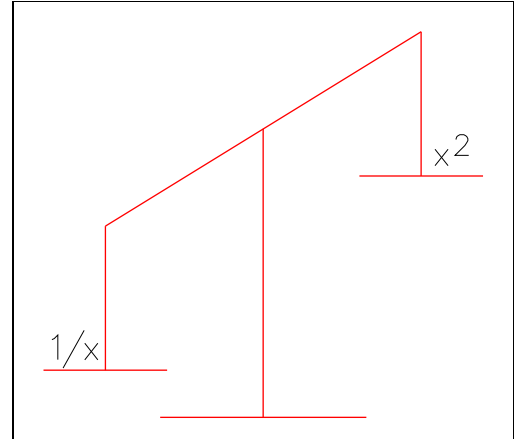


Abb. 3.2: Ungleichgewicht

Beispiel 3.13 Der Definitionsbereich der Ungleichung $\frac{3x}{5} < 7x - 3$ ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Zunächst multiplizieren wir diese Ungleichung mit ihrem Hauptnenner.

$$\begin{aligned} \frac{3x}{5} < 7x - 3 & \quad | \cdot 5 \\ \Leftrightarrow 3x < 35x - 15 & \quad | - 35x \\ \Leftrightarrow -32x < -15 & \quad | : -32 \\ \Leftrightarrow x > \frac{15}{32} \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathbb{L} = (\frac{15}{32}, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{15}{32}\}$.

Regel 3.14 (Quadrieren und Auflösen von Quadraten) Für $a \geq 0$ gelten:

(a)

$$x \leq a \Leftrightarrow x < 0 \vee (x \geq 0 \wedge x^2 \leq a^2)$$

(b)

$$x^2 \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$$

(c)

$$x^2 \geq a \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{a} \vee x \geq \sqrt{a}$$

Beispiel 3.15

- (a) Für welche natürliche Zahl n gilt $\frac{n^3 + 2}{n^5 + n} \leq \frac{1}{n^2}$?

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \mathbb{N}$. Es wird berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{n^3 + 2}{n^5 + n} \leq \frac{1}{n^2} & \quad | \cdot n(n^5 + n) = n^2(n^4 + 1) \\ \Leftrightarrow n^4 + 2n \leq n^4 + 1 & \quad | - n^4 \\ \Leftrightarrow 2n \leq 1 & \quad | : 2 \\ \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dies ist für keine natürliche Zahl erfüllt: $\mathbb{L} = \emptyset$. Also gilt für allen natürlichen Zahlen

$$\frac{n^3 + 2}{n^5 + n} > \frac{1}{n^2}.$$

- (b) Welche Punkte $P(x,y)$ der Ebene erfüllen $1 - x \leq y \leq \frac{x^5 - x^4}{2 - 3x^2}$? (s. [?, S. 34])

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2/3}\}$.

Gesucht sind also alle Punkte der xy -Ebene, die oberhalb der linken Kurve $y = 1 - x$ (eine Gerade) und unterhalb der rechten Kurve $y = \frac{x^5 - x^4}{2 - 3x^2}$ liegen. Wir berechnen zunächst die Schnittstellen dieser beiden Kurven:

$$\begin{aligned} 1 - x &= \frac{x^5 - x^4}{2 - 3x^2} = \frac{(x-1)x^4}{2 - 3x^2} && | : (1-x) \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee 1 &= -\frac{x^4}{2 - 3x^2} && | \cdot (2 - 3x^2) \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee 2 - 3x^2 &= -x^4 && | +x^4 \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x^4 - 3x^2 + 2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die rechte Gleichung $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ ist biquadratisch, sie wird durch die Substitution $u = x^2$ gelöst:

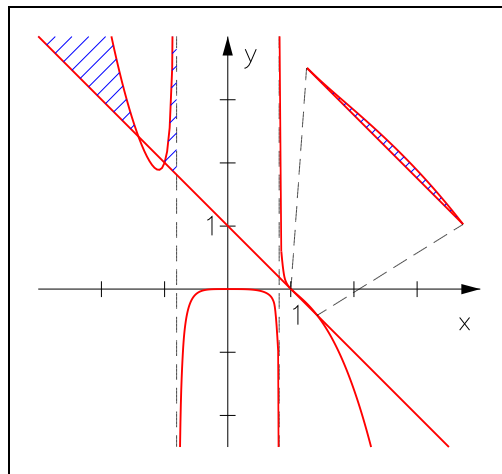
$$\begin{aligned} u^2 - 3u + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow u &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow u &= 2 \vee u = 1 \end{aligned}$$

Mit diesen beiden Ergebnissen lösen wir die Gleichung $x^2 = u$ und erhalten mit der ersten Lösung aus (3.4) die gesamte Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\} = \{\pm\sqrt{2}, \pm 1\}$$

$x = 1$ ist doppelte Lösung. Daher werden sich an dieser Stelle die Kurven nicht schneiden, sondern nur berühren. Zur Lösung der Aufgabenstellung werden die beiden Terme skizziert. Dies zeigt, dass es Punkte $P(x,y)$ gibt, die die Ungleichung erfüllen, genau dann, wenn gilt

$$x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup \left[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{2}\right].$$



3.E Gleichungen höheren Grades

Zur Lösung der Gleichung dritten Grades (z.B. $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$) muss die erste Nullstelle „geraten“ werden. „Geschicktes Raten“ wird durch folgende Regel unterstützt:

Regel 3.16 (Rationale Nullstellen ganzer Polynome) Sind alle Koeffizienten ganze Zahlen und der Hauptkoeffizient eins, so ist jede rationale¹ Nullstelle eine ganze Zahl und ein (positiver oder negativer) Teiler des konstanten Koeffizienten.

Dies verdeutlichen wir an dem o.a. Beispiel:

¹Bruch

Beispiel 3.17 Der konstante Koeffizient von

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$

ist 24 und hat die Teiler $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$. Von diesen findet man mit Hilfe des Horner-Schemas (s. Beispiel 2.23) $x_1 = 2$ als erste Nullstelle und die Zerlegung

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x^2 + x - 12)(x - 2).$$

Die weiteren Nullstellen von $x^3 - x^2 - 14x + 24$ sind auch Nullstellen von $x^2 + x - 12$, diese werden mit der pq-Formel berechnet:

$$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

Folglich ist die Gesamtlösung des Beispiels $\mathbb{L} = \{-4, 2, 3\}$.

<i>Horner-Schema</i>				
	1	-1	-14	24
1	1	0	-14	10
-1	1	-2	-12	36
2	1	1	-12	0

§ 4 Funktionen

4.A Definition einer Funktion

Definition 4.1

(a) Eine **Funktion** $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{W}_f \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right\}$ besteht aus

- einem **Definitionsbereich** $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}$,
- einem **Wertevorrat** $\mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R}$,
- einer **Zuordnungsvorschrift** $x \mapsto f(x)$, die jedem $x \in \mathbb{D}_f$ genau ein $f(x) \in \mathbb{W}_f$ zuordnet.

Ist der Definitionsbereich nicht explizit angegeben, so soll er als maximale Teilmenge in \mathbb{R} gewählt werden.

(b) Der **Graph** einer Funktion f ist die Menge $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{D}_f\} \subseteq \mathbb{R}^2$ in der reellen Ebene.

(c) Der **Wertebereich** $f(\mathbb{D}_f)$ (**Bildbereich**, **Bild**) der Funktion f ist die Menge der zugeordneten Werte:

$$f(\mathbb{D}_f) := \{f(x) \mid x \in \mathbb{D}_f\} \subseteq \mathbb{W}_f$$

Beispiel 4.2

(a) $p_2 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}_{p_2} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right\}$ ist die Einheitsparabel. Es gelten $\mathbb{D}_{p_2} = \mathbb{R}$, $p_2(\mathbb{D}_{p_2}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(b) $\sin = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}_{\sin} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{array} \right\}$ ist die Sinusfunktion mit $\mathbb{D}_{\sin} = \mathbb{R}$, $\sin(\mathbb{D}_{\sin}) = [-1, 1]$.

(c) $w = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}_w \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt{y} \end{array} \right\}$ ist die Wurzelfunktion mit $\mathbb{D}_w = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $w(\mathbb{D}_w) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(d) $h = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}_h \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \frac{1}{z} \end{array} \right\}$ ist die Hyperbelfunktion mit $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h(\mathbb{D}_h) = \mathbb{R}^\times = \mathbb{D}_h$.

Hierbei wurden folgende Bezeichnungen benutzt:

Definition 4.3 (Intervalle)

(a) **abgeschlossenes Intervall:** $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$

(b) **offenes Intervall:** $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x < b\}$

(c) **halboffenes Intervall:** $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x < b\}$

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x \leq b\}$

(d) **nicht-negative reelle Zahlen:** $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$

(e) **reelle Zahlen ungleich Null:** $\mathbb{R}^\times := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Offene Intervalle werden auch in der Form $]a, b[$ geschrieben. Verständlich sind jetzt auch die Bezeichnungen \mathbb{Q}^\times , $\mathbb{Z}_{\geq -5}$.

4.B Betrag

Definition 4.4 (Betragfunktion) $|| := \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array} \right\}$ ist die Betragfunktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_|| = \mathbb{R}$ und dem Wertebereich $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Die Betragsgleichung ist in Abb. 4.1 dargestellt.

Regel 4.5 (Eigenschaften der Betragfunktion) Mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gelten:

- | | |
|---|---|
| (a) $ a \geq 0$ | (f) $b \neq 0 \Rightarrow \left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b }$ |
| (b) $ a = 0 \iff a = 0$ | (g) $ a^n = a ^n$ |
| (c) $ a \leq c \iff -c \leq a \leq c$ | (h) $ a ^n = a^n$ für gerades $n \in \mathbb{N}$ |
| (d) $ a \geq c \iff a \leq -c \vee a \geq c$ | (i) $ a + b \leq a + b $ (Dreiecksungleichung) |
| (e) $ a \cdot b = a \cdot b $ | (j) $ a - b \leq a - b $ (Übungsaufgabe) |

BEWEIS:

- (a), ((b)), ((e)) sind klar; ((c)), ((d)) werden durch Abb. 4.2 verdeutlicht. ((g)) und ((h)) folgen aus ((e)).
 (f) Das Ergebnis folgt nach einer Division der folgenden Gleichung durch $|b|$:

$$|b| \cdot \left| \frac{a}{b} \right| \stackrel{(e)}{\approx} \left| b \cdot \frac{a}{b} \right| = |a|$$

$$(i) \quad |a + b| \leq |a| + |b| \stackrel{((c))}{\iff} -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \\ \iff -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Die letzte Gleichung folgt durch zweimaliges Anwenden von 3.11, ((f)), also Addieren der beiden offensichtlich wahren Aussagen

- $-|a| \leq a \leq |a|$ und
- $-|b| \leq b \leq |b|$.

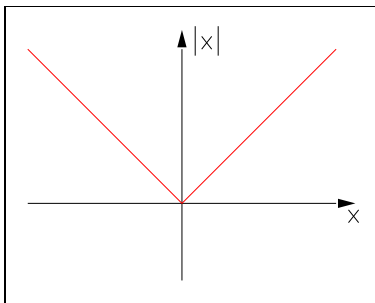


Abb. 4.1: Betragfunktion

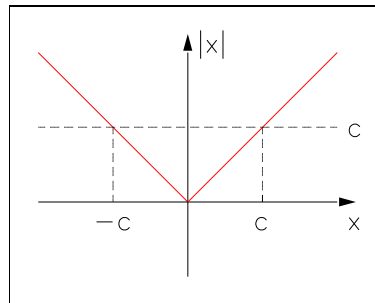


Abb. 4.2: Betragfunktion: Grenzen

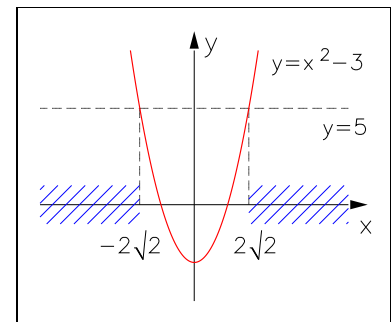


Abb. 4.3: Betragfunktion: Quadrate

Beispiel 4.6

- (a) $|x - 3| = 5 \iff x - 3 = 5 \vee x - 3 = -5 \iff x = 8 \vee x = -2$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
 Damit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2, 8\}$.

Wir betrachten einen zweiten Lösungsweg durch Quadrieren der Gleichung. Da beide Seiten nicht-negativ sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} |x - 3| = 5 &\iff (x - 3)^2 = 25 &\iff x^2 - 6x + 9 = 25 \\ &\iff x^2 - 6x - 16 = 0 &\iff x = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm 5 \\ &\iff x = 8 \vee x = -2 \end{aligned}$$

(b) Mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |x^2 - 3| > 5 &\iff x^2 - 3 > 5 \vee x^2 - 3 < -5 &\iff x^2 > 8 \vee x^2 < -2 \\ &\iff x^2 > 8 \vee \text{falsch} &\iff x^2 > 8 \\ &\iff x > 2\sqrt{2} \vee x < -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge (vgl. Abb. 4.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\sqrt{2} \vee x < -2\sqrt{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\sqrt{2}\} \\ &= (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

(c) Die Ungleichung $|2x - 4| \leq x + 1$ kann nur erfüllt sein, wenn $x + 1 \geq 0$ gilt, andernfalls wäre die linke Seite negativ. Folglich wird der Definitionsbereich festgelegt auf $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} = \mathbb{R}_{\geq -1}$. Innerhalb dieses Definitionsbereichs sind beide Seiten nicht-negativ und Quadrieren ist eine Äquivalenzumformung.

$$\begin{aligned} |2x - 4| &\leq x + 1 \\ \iff (2x - 4)^2 &\leq (x + 1)^2 \\ \iff 4x^2 - 16x + 16 &\leq x^2 + 2x + 1 && | -(x^2 + 2x + 1) \\ \iff 3x^2 - 18x + 15 &\leq 0 && | : 3 \\ \iff x^2 - 6x + 5 &\leq 0 && (\text{Satz von Vieta oder pq-Formel}) \\ \iff (x - 5)(x - 1) &\leq 0 && (\text{Ein Faktor nicht-negativ, ein Faktor nicht-pos.}) \\ \iff ((x - 5) \leq 0 \wedge (x - 1) \geq 0) \vee ((x - 5) \geq 0 \wedge (x - 1) \leq 0) \\ \iff (x \leq 5 \wedge x \geq 1) \vee (x \geq 5 \wedge x \leq 1) &&& (\text{Zweite Klammer immer falsch!}) \\ \iff x \in [1, 5] \end{aligned}$$

Wegen $[1, 5] \subseteq \mathbb{D}$ folgt die Lösung $\mathbb{L} = [1, 5]$.

Beispiel 4.7 Zur Lösung der Ungleichung $|x - 4| - |2x + 6| \geq 0$ werden die Nullstellen der Ausdrücke in den einzelnen Beträgen benötigt. Diese sind -3 und 4 . Wir unterteilen nun die reelle Achse in drei Bereiche. Es handelt sich hierbei um die Intervalle $(-\infty, -3)$, $[-3, 4)$ und $[4, \infty)$. Wir erstellen nun eine Tabelle, die die Vorzeichen der Ausdrücke in den gegebenen Intervallen sowie die Betragsauflösung enthält.

	Intervall	$(-\infty, -3)$	$(-3, 4)$	$(4, \infty)$
	Prüfstelle	$x = -5$	$x = 0$	$x = 10$
Vorzeichen von	$x - 4$	-	-	+
	$2x + 6$	-	+	+
Betrag auflösen	$ x - 4 $	$4 - x$	$4 - x$	$x - 4$
	$ 2x + 6 $	$-2x - 6$	$2x + 6$	$2x + 6$

Wir bestimmen nun die Lösungen der Betragsgleichung für jedes Intervall. Mit diesen Lösungen unterteilen wir die reelle Achse in offene Intervalle, um anschließend mit Hilfe einer Prüfstelle die Ausgangsgleichung zu prüfen.

- Für $x \in (-\infty, -3)$ erhalten wir mit der oberen Tabelle die Gleichung $(4 - x) - (-2x - 6) = 0$. Lösen wir nach x auf, erhalten wir $x = -10$. Da $-10 \in (-\infty, -3)$ ist, ist -10 eine Lösung der Gleichung.
- Für $x \in [-3, 4)$ erhalten wir $(4 - x) - (2x + 6) = 0 \iff x = -\frac{2}{3}$. Es gilt $-\frac{2}{3} \in [-3, 4)$ und somit ist $-\frac{2}{3}$ eine Lösung der Gleichung.
- Für $x \in [4, \infty)$ erhalten wir $(x - 4) - (2x + 6) = 0 \iff x = -10$. Es gilt $-10 \notin [4, \infty)$ und somit ist -10 keine Lösung der Gleichung.

Die Gleichung $|x - 4| - |2x + 6| = 0$ hat somit die Lösungen -10 und $-\frac{2}{3}$. Wir unterteilen die reelle Achse nun in drei offenen Intervalle und bestimmen für eine beliebige Prüfstelle im jeweiligen Intervall, ob die Ungleichung erfüllt ist. Ist die Ungleichung erfüllt, so gehört das Intervall zur Lösungsmenge andernfalls nicht. Erfüllen mehrere Intervalle die Ungleichung, so ist die Lösungsmenge die Vereinigung dieser Intervalle.

Intervall	$(-\infty, -10)$	$(-10, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}, \infty)$
Prüfstelle	$x = -11$	$x = -1$	0
Setze Prüfstelle in Ungleichung ein	$-1 \geq 0$	$1 \geq 0$	$-2 \geq 0$
Ist Ungleichung erfüllt?	nein	ja	nein

Die Ungleichung ist nur im Intervall $[-10, -\frac{2}{3}]$ erfüllt. Wir erhalten hier ein geschlossenes Intervall, weil auch für $x = -10$ und $x = -\frac{2}{3}$ die Ungleichung erfüllt ist (wir betrachten ≥ 0). Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = [-10, -\frac{2}{3}]$. Würden wir jedoch die Ungleichung $|x - 4| - |2x + 6| > 0$ lösen, dann wäre die Lösungsmenge das offene Intervall $(-10, -\frac{2}{3})$.

4.C Abstand, Umgebung, Minimum, Maximum

Bemerkung 4.8 (Abstand und Umgebung)

- (a) Der *Abstand* zweier reeller Zahlen a und b ist $|a - b|$.
- (b) $x \in \mathbb{R}$ erfüllt $|x - a| < r$ genau dann, wenn der Abstand zwischen x und a kleiner r ist. Die Menge all dieser Zahlen heißt *r-Umgebung* $U_r(a)$ von a . $U_r(a)$ ist die Menge aller reellen Zahlen, deren Abstand von a kleiner r ist.

Regel 4.9

- (a) $|x - a| < r \iff -r < x - a < r \iff a - r < x < a + r \iff x \in (a - r, a + r)$
Damit ist $U_r(a) = (a - r, a + r)$.
- (b) $|x - a| \geq r \iff x - a \leq -r \vee x - a \geq r$
 $\iff x \leq a - r \vee x \geq a + r$
 $\iff x \in (-\infty, a - r] \vee x \in [a + r, \infty)$
 $\iff x \in (-\infty, a - r] \cup [a + r, \infty)$

Analoge Regeln gelten für $|x - a| > r$ und $|x - a| \leq r$.

Beispiel 4.10 $|x + 2| \leq 5 \iff |x - (-2)| \leq 5 \iff -7 \leq x \leq 3 \iff x \in [-7, 3]$

Definition 4.11 (Minimum und Maximum)

- (a) $\min(a, b) := \begin{cases} a & a \leq b \\ b & b \leq a \end{cases}$ ist das Minimum der beiden Zahlen a und b , also die nicht-größere der beiden.
- (b) $\max(a, b) := \begin{cases} a & a \geq b \\ b & b \geq a \end{cases}$ ist das Maximum der beiden Zahlen a und b , also die nicht-kleinere der beiden.

§ 5 Trigonometrie

5.A Sinus und Kosinus

Definition 5.1 (Bogen- und Gradmaß) Winkel werden im Grad- oder Bogenmaß angegeben. In den Anwendungen überwiegt das Gradmaß. Die Mathematik benutzt hingegen fast ausschließlich das Bogenmaß. Durch die Anwendung des Bogenmaßes haben die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen eine einfachere Form. Das Bogenmaß ist die dimensionslose Länge des zu einem Winkel α gehörenden Kreisbogens am Einheitskreis. Als Einheit wird Radiant [rad] angegeben, diese Einheit ist dimensionslos und wird daher oft weggelassen.

Die Umrechnung erfolgt mit Hilfe des Faktors $\pi/180$:

$$\alpha = 30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} .$$

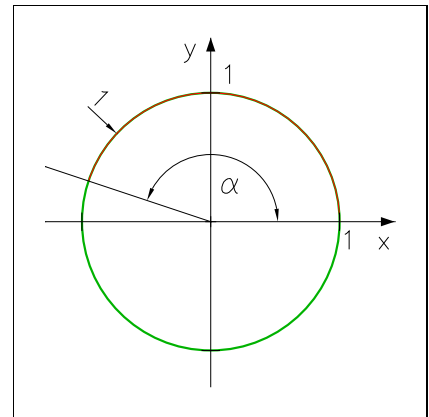


Abb. 5.1: Winkeldefinition

Definition 5.2 (Sinus und Kosinus) Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus werden am Einheitskreis

$$K((0;0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad (5.1)$$

definiert: Ist $P(x;y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis zum Argumentwinkel α , so gelten:

$$\cos(\alpha) := x \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) := y .$$

Die x -Komponente des Punktes ist also gleich dem Kosinus, die y -Komponente gleich dem Sinus des Argumentwinkels:

$$P(x; y) = P(\cos(\alpha); \sin(\alpha)) .$$

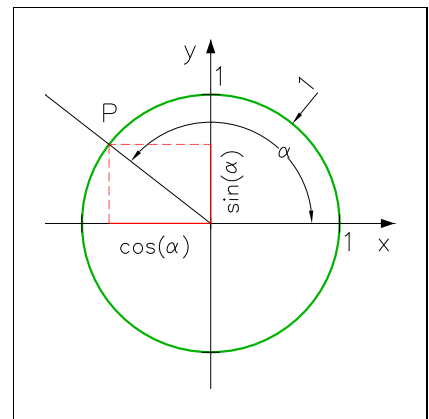


Abb. 5.2: Sinus und Kosinus

Sinus und Kosinus sind für jeden Winkel definiert: $\mathbb{D}_{\sin} = \mathbb{D}_{\cos} = \mathbb{R}$.

Ihre Werte liegen im Intervall $[-1, 1]$, sie wiederholen sich alle $360^\circ (= 2\pi)$. Aus der definierenden Gleichung des Einheitskreises (5.1) folgt

$$1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \quad (5.2)$$

Beispiel 5.3 (Einige wichtige Werte)

- (a) $\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$: Das Dreieck Δ_{OQP} (s. Abb. 5.3) ist gleichseitig mit der Seitenlänge 1. Daher gilt $1 = 2 \cdot \sin(\pi/6)$, also

$$\sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{und mit (5.1)} \quad \cos(30^\circ) = \sqrt{1 - \sin^2(30^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

(b) $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$: Wegen $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$ folgt aus $1 = 2 \cdot \sin^2(\pi/4)$ (s.5.1):

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071.$$

(c) $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$: Wegen $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$ und $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$ folgen sofort

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bemerkung 5.4 (Nullstellen der Sinus-Funktion)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) = 0 &\iff \alpha = \dots, -360^\circ, -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, \dots \\ &\iff \alpha = \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \\ &\iff \alpha \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \pi \cdot \mathbb{Z} \\ \cos(\alpha) = 0 &\iff \alpha = \dots, -450^\circ, -270^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, \dots \\ &\iff \alpha = \dots, -5\frac{\pi}{2}, -3\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots \\ &\iff \alpha \in \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Regel 5.5 (Wichtige Umrechnungen)

$$\begin{array}{ll} \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) & \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos(\alpha) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin(\alpha) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin(\alpha) \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin(\alpha) & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos(\alpha) \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\alpha) & \cos(\pi + \alpha) &= \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \\ \sin(2\pi + \alpha) &= \sin(\alpha) & \cos(2\pi + \alpha) &= \cos(\alpha) \end{array}$$

Die letzte Regel besagt, dass die Sinus- und die Kosinusfunktion 2π -periodisch sind.

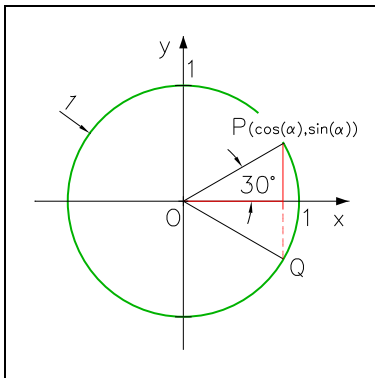


Abb. 5.3: Sinus und Kosinus 30°

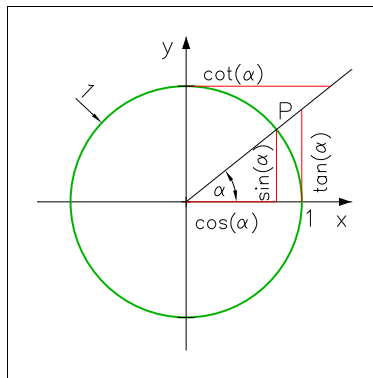


Abb. 5.4: Kreisfunktionen am Kreis

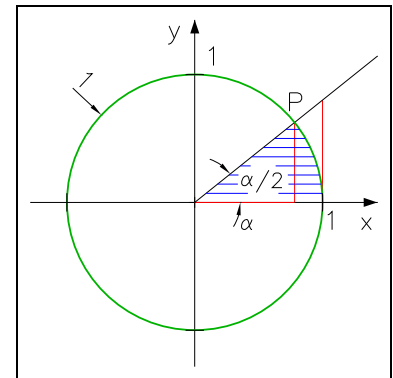


Abb. 5.5: Kreissektor: Fläche

5.B Tangens und Kotangens

Definition 5.6 (Tangens und Kotangens)

Tangens und Kotangens werden als Quotienten von Sinus und Kosinus definiert (vgl. Abb. 5.4):

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}; \quad \mathbb{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\} \quad \text{und} \quad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}; \quad \mathbb{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi\mathbb{Z} \}.$$

Bemerkung 5.7 Gehört α zu beiden Definitionsbereichen ($\alpha \in \mathbb{D}_{\tan} \cap \mathbb{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \}$), so gilt

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}.$$

Mit Hilfe der definierten Funktionen kann für $\alpha \in [0, \pi/2]$ die Sektorfläche am Einheitskreis gemäß Abb. 5.5 abgeschätzt werden: Die innere Dreiecksfläche ist kleiner als die Kreissektorfläche, diese kleiner als die äußere Dreiecksfläche. Für die Berechnung der Kreissektorfläche beachten wir, dass ihr Inhalt $A(\alpha)$ sich zum Inhalt π des Gesamtkreises verhält wie der Sektorwinkel α zum Gesamtwinkel 2π , also $A(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{2}$ ist. Damit erhalten wir

$$\frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tan(\alpha)}{2}.$$

Eine Division durch $\sin(\alpha)/2$ liefert

$$\cos(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

Hieraus folgt durch rechtsseitigen Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0^+$

$$1 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} \leq 1, \quad \text{also} \quad 1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\sin(\alpha)}.$$

Eine analoge Abschätzung für negative Winkel führt zu

$$1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{\alpha}{\sin(\alpha)}.$$

Durch Kehrwertbildung ist damit der erste Teil des folgenden Satzes nachgewiesen! Beide Aussagen werden bei einer ersten Berechnung der Ableitungen benötigt.

Satz 5.8

$$(a) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1 \qquad (b) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha} = 0$$

ERSTER BEWEIS DES ZWEITEN TEILS: Für Winkel α mit $-1 \leq \alpha \leq 1$ gilt wegen $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$

$$\cos^2(\alpha) \leq \cos(\alpha) \leq 1.$$

Durch Subtraktion von 1 und Division durch α erhalten wir für $\alpha \geq 0$

$$\frac{\cos^2(\alpha) - 1}{\alpha} \leq \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha} \leq 0. \tag{5.3}$$

Den linken Ausdruck rechnen wir mit (5.2) um und erhalten

$$\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \cdot \sin(\alpha) \leq \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha} \leq 0.$$

In diesem Ausdruck lassen wir $\alpha \rightarrow 0^+$ gehen und erhalten mit dem ersten Teil des Satzes

$$1 \cdot 0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha} \leq 0, \quad \text{also} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha} = 0.$$

Im Falle $\alpha \leq 0$ drehen sich in (5.3) die Ungleichheitsrelationen um und wir erhalten analog

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha} = 0$$

und damit die Behauptung des Satzes.

ZWEITER BEWEIS: Wenn die Rechenregeln der Grenzwertberechnung bekannt sind, kann man dieses Ergebnis einfacher erzielen. Im ersten Schritt erweitern wir mit $\cos(\alpha) + 1$ und im vorletzten benutzen wir das erste Ergebnis des Satzes:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha) - 1}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(\cos(\alpha) - 1)(\cos(\alpha) + 1)}{\alpha(\cos(\alpha) + 1)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos^2(\alpha) - 1}{\alpha(\cos(\alpha) + 1)} \\ &= - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha(\cos(\alpha) + 1)} = - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha) + 1} = 1 \cdot 0 = 0 \quad \diamond \end{aligned}$$

Regel 5.9 (Vorzeichen in den einzelnen Quadranten)

sin	cos	tan	cot
+ +	- +	- +	- +
- -	- +	+ -	+ -

Regel 5.10 (Wichtige Werte)

$\alpha [^\circ]$	$\alpha [\text{rad}]$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
0	0	0	1	0	-
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90	$\pi/2$	1	0	-	0
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0	-

5.C Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

Aus dem Strahlensatz folgen durch Vergleich des Einheitskreises und eines Kreises des Radius c :

Regel 5.11 (Trigonometrische Regeln am rechtwinkligen Dreieck) Die folgenden Regeln sind in Abb. 5.6 dargestellt.

- (a) Der Sinus eines Winkels am rechtwinkligen Dreieck ist gleich dem Quotienten aus Gegenkathete und Hypotenuse, der Kosinus gleich dem Quotienten aus Ankathete und Hypotenuse:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}; \quad \sin(\beta) = \frac{b}{c}; \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}; \quad \cos(\beta) = \frac{a}{c}.$$

- (b) Der Tangens eines Winkels ist gleich dem Quotienten aus der Gegenkathete und der Ankathete, der Kotangens gleich dem Quotienten aus Ankathete und Gegenkathete:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}; \quad \tan(\beta) = \frac{b}{a}; \quad \cot(\alpha) = \frac{b}{a}; \quad \cot(\beta) = \frac{a}{b}.$$

Mit den bisher erarbeiteten Techniken weisen wir einige klassische Sätze nach:

Satz 5.12 (Pythagoras¹) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

ERSTER BEWEIS: Aus 5.2 folgt die Gleichung

$$1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

die wir lediglich noch mit c^2 multiplizieren müssen.

¹Pythagoras von Samos, gr. Mathematiker, um 580 - 496 v. Chr.

ZWEITER BEWEIS: Der Satz des Pythagoras kann auch mit elementarer Geometrie nachgewiesen werden. In Abb. 5.7 ist die Fläche des großen Quadrats gleich der Summe aus der Fläche des kleinen Quadrats und den vier Dreiecken:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \frac{ab}{2} \iff a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab .$$

◇

Satz 5.13 (Höhensatz) *Das Quadrat der Höhe ist gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte:*

$$h^2 = p \cdot q .$$

Der Beweis wird mit Hilfe der ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke Δ_{ADC} und Δ_{CDB} (s. Abb. 5.8) geführt:

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{q} = \frac{p}{h} .$$

Multiplizieren wir die beiden Brüche mit hq , so erhalten wir das gewünschte Ergebnis.

◇

Aufgrund der Ähnlichkeit der genannten Dreiecke kann der Beweis auch mit Hilfe des Strahlensatzes geführt werden.

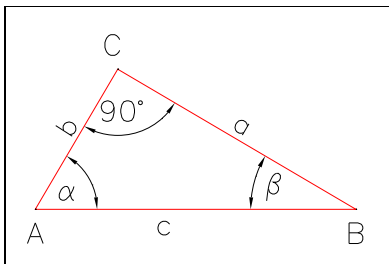


Abb. 5.6: Rechtwinkliges Dreieck

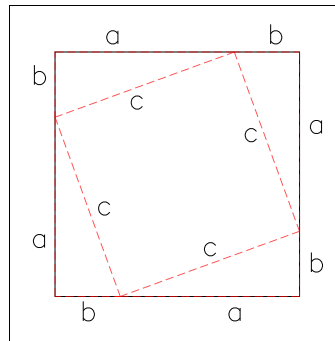


Abb. 5.7: Satz des Pythagoras

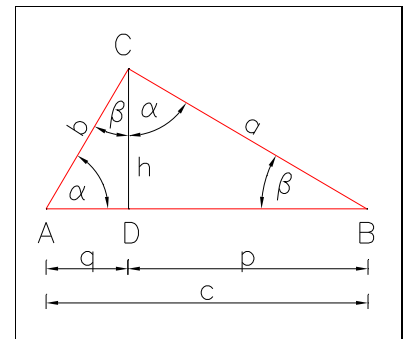


Abb. 5.8: Höhensatz

Satz 5.14 (Kathetensatz, Satz des Euklid²) *Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Produkt aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt:*

$$a^2 = p \cdot c \quad \text{und} \quad b^2 = q \cdot c .$$

BEWEIS: Den Beweis der ersten Gleichung wir wieder mit Hilfe ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke. Wir betrachten Δ_{ABC} und Δ_{CBD} :

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{p}{a} .$$

Multiplizieren wir die beiden Brüche mit ac , so erhalten wir das gewünschte Ergebnis.

Analog kann die zweite Gleichung nachgewiesen werden. An dieser Stelle soll sie hier aber mit Hilfe Euklids anschaulicher Argumentation gezeigt werden:

Laut Abb. 5.9 sind die Dreiecke Δ_{ECA} und Δ_{BGA} deckungsgleich (kongruent), das zweite entsteht aus dem ersten durch eine Drehung um 90° . Damit sind ihre Flächeninhalte gleich und gleich dem halben Flächeninhalt der Vierecke V_{AEFD} und V_{ACHG} : Das zusammengehörende Dreieck und Viereck haben jeweils eine gemeinsame Grundseite (AE bzw. AG) und die gleiche Höhe (AC bzw. EF). Damit sind auch die Vierecksflächen gleich:

$$b^2 = q \cdot c .$$

◇

²Euklid von Alexandria, gr. Mathematiker, ca. 365 - ca. 300 v. Chr.

Für beide Sätze gibt es einen anderen Nachweis mit Hilfe des Satzes von Pythagoras: Wenden wir diesen auf die Teildreiecke und das gesamte Dreieck an, so erhalten wir

$$a^2 = p^2 + h^2 \quad (5.4)$$

$$b^2 = q^2 + h^2 \quad (5.5)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 = (p + q)^2 \quad (5.6)$$

Subtrahieren wir die ersten beiden von der letzten, so erhalten wir

$$0 = p^2 + 2pq + q^2 - p^2 - h^2 - q^2 - h^2 = 2pq - 2h^2$$

und damit den Höhensatz. Ersetzen wir h^2 in der zweiten Gleichung durch pq , wie gerade gezeigt, so erhalten wir

$$b^2 = q^2 + pq = q(p + q) = qc$$

und somit den Kathetensatz.

5.D Trigonometrie am allgemeinen Dreieck

Bezeichnungen 5.15 (Spitz- und stumpfwinklige Dreiecke) Sind alle Winkel kleiner 90° , so heißt das Dreieck *spitzwinklig*. Ist ein Winkel gleich 90° , so heißt es *rechtwinklig*, ist ein Winkel größer 90° , so heißt es *stumpfwinklig*.

Satz 5.16 Die Winkelsumme in einem Dreieck ist 180° : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Satz 5.17 (Sinussatz) In einem beliebigen Dreieck gelten $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

BEWEIS: Wir beweisen die erste Gleichung, die wir durch Multiplikation mit dem Produkt ab der Nenner äquivalent umformen in

$$b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta).$$

Da h die Gegenkathete im rechtwinkligen Dreieck Δ_{ADC} (s. Abb. 5.10) zum Winkel α und im rechtwinkligen Dreieck Δ_{DBC} zum Winkel β ist, sind beide Produkte gleich h und damit gleich. Die zweite Gleichheit folgt analog. \diamond

Wir erweitern den Satz des Pythagoras auf allgemeine Dreiecke:

Satz 5.18 (Kosinussatz)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha), \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\beta), \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma).$$

BEWEIS: Wir wenden den Satz des Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke Δ_{DBC} und Δ_{ADC} an und erhalten

$$h^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2,$$

woraus sich durch Auflösen nach a^2

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos(\alpha)$$

ergibt. Die beiden anderen Gleichungen werden analog bewiesen. \diamond

Bezeichnungen 5.19 (In- und Umkreis)

- Der *Inkreis* eines Dreiecks hat alle Seiten des Dreiecks zur Tangente. Sein Mittelpunkt ist gleich dem Schnittpunkt aller Winkelhalbierenden.
- Der *Umkreis* eines Dreiecks beinhaltet alle Punkte des Dreiecks. Sein Mittelpunkt ist gleich dem Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten.

Auf den Inkreis gehen wir hier nicht weiter ein. Wir vergleichen im folgenden den *Mittelpunktswinkel* δ , den *Peripheriewinkel* γ und *Sekantenwinkel* ε (s. Abb. 5.11):

Regel 5.20 (Mittel-, Peripherie- und Sekantenwinkel)

$$\delta = 2\gamma = 2\varepsilon$$

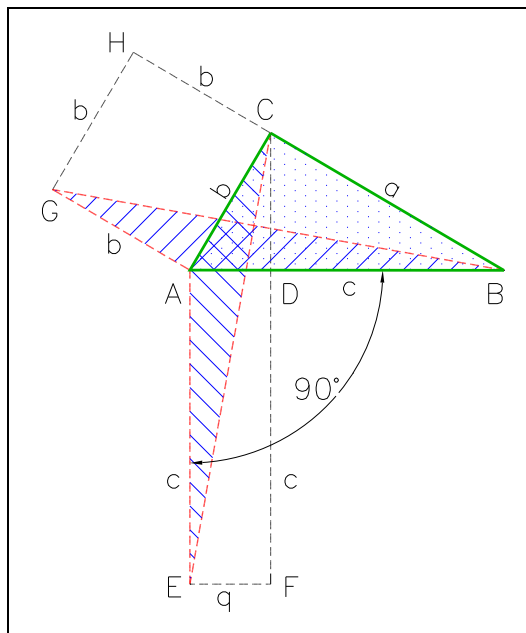


Abb. 5.9: Kathetensatz

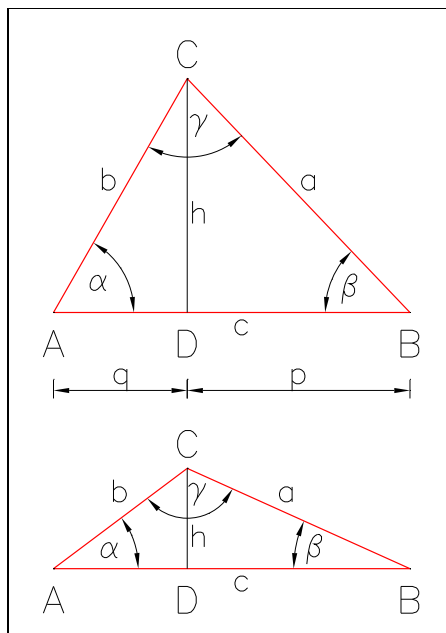


Abb. 5.10: Allgemeines Dreieck

BEWEIS: Diese Zusammenhänge werden über Winkelsummenberechnung nachgewiesen, s. Abb. 5.12 :

- (a) Die Dreiecke Δ_{ABM} , Δ_{BCM} , Δ_{CAM} haben jeweils zwei gleich lange Seiten, also sind sie gleichschenkelig und jeweils zwei Winkel stimmen überein:

$$\alpha_1 = \gamma_1 ; \quad \alpha_2 = \beta_1 ; \quad \beta_2 = \gamma_2 .$$

Wir beginnen mit der Winkelsumme im Dreieck Δ_{ABM} und fahren mit der Winkelsumme im Dreieck Δ_{ABC} fort:

$$\begin{aligned} \delta &= 180^\circ - \alpha_2 - \beta_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma) - \alpha_2 - \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma \\ &= 2 \cdot \gamma . \end{aligned}$$

- (b) Zur Berechnung des Sekantenwinkels beachten wir zunächst, dass die radiale Gerade MA und die Tangente in A senkrecht aufeinander stehen:

$$90^\circ = \varepsilon + \alpha_2 .$$

Jetzt summieren wir alle Winkel im Dreieck Δ_{ABM} :

$$\delta = 180^\circ - \alpha_2 - \beta_1 = 180^\circ - 2\alpha_2 = 2 \cdot (\varepsilon + \alpha_2) - 2 \cdot \alpha_2 = 2 \cdot \varepsilon .$$

◇

Beispiel 5.21 Gegeben seien in ein Dreieck $a = 226$ cm, $c = 315$ cm und $\beta = 103^\circ$. Zu berechnen sind alle anderen Seitenlängen und Winkel.

LÖSUNG: Mit dem Kosinussatz erhalten wir $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\beta) \approx 182329$ cm², also $b \approx 427$ cm. Der Sinussatz liefert

$$\sin(\alpha) = \frac{a \sin(\beta)}{b} \approx 0.52 .$$

Damit ist $\alpha \approx 31.04^\circ$ oder $\alpha \approx 148.96^\circ$. Da β bereits größer als 90° ist, muss α kleiner als 90° sein. Folglich ist $\alpha \approx 31.04^\circ$.

Der Winkel α kann alternativ über den Kosinussatz berechnet werden. Hierzu wird die Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$ zunächst nach $\cos(\alpha)$ aufgelöst und anschließend α berechnet.

Als letztes wird der Winkel γ über die Winkelsumme berechnet:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 31.04^\circ - 103^\circ \approx 45.96^\circ .$$

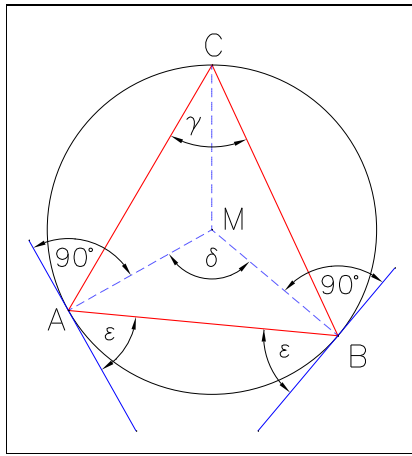


Abb. 5.11: Umkreis

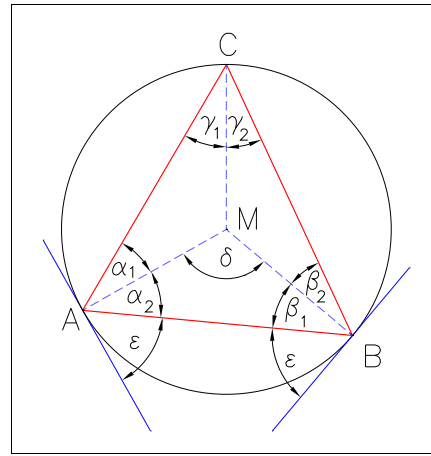


Abb. 5.12: Umkreis: Winkel

◇

Abschließend erhalten wir einen wichtigen Spezialfall zum Zusammenhang zwischen Mittelpunkts- und Peripheriewinkel. Ist die Hypotenuse des Dreiecks ein Durchmesser des Umkreises, so ist $\delta = 180^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$:

Satz 5.22 (Thales³) Ein Dreieck über dem Durchmesser des Umkreises ist ein rechtwinkliges Dreieck.

5.E Additionssätze

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Verhalten der trigonometrischen Funktionen bei der Addition und Subtraktion von Winkeln:

Satz 5.23 (Additionssätze)

$$\begin{aligned} (a) \quad \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) & (b) \quad \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ (c) \quad \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) & (d) \quad \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \end{aligned}$$

BEWEIS: Zum Nachweis von ((c)) ziehen wir für den Fall $0 \leq \alpha, \beta \leq \alpha + \beta \leq 180^\circ$ den Kosinussatz heran (vgl. 5.13) und wenden den Satz des Pythagoras auf die Dreiecke Δ_{ADC} und Δ_{DBC} an:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{p^2 + h^2 + q^2 + h^2 - (p+q)^2}{2ab} \\ &= \frac{2h^2 + p^2 + q^2 - p^2 - 2pq - q^2}{2ab} \\ &= \frac{2h^2 - 2pq}{2ab} = \frac{h}{a} \cdot \frac{h}{b} - \frac{p}{a} \cdot \frac{q}{b} \\ &= \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) \\ &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \end{aligned}$$

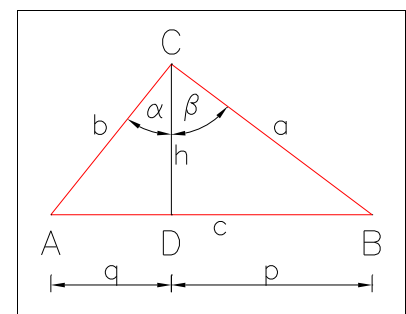


Abb. 5.13: Additionssatz

Mit Hilfe von (5.5) und dem bisher gezeigten folgen jetzt für $0 \leq \alpha, \beta \leq \alpha + \beta \leq 180^\circ$:

³Thales von Milet, gr. Gelehrter und Staatsmann, ca. 624 (Milet, Kleinasien) - 546 v. Chr.

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos(\alpha) \cdot \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(-\beta) \\
&= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\
\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos(\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(\beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin(\alpha) \cdot \cos(-\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(-\beta) \\
&= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)
\end{aligned}$$

Für Winkel, die die Voraussetzung $0 \leq \alpha, \beta \leq \alpha + \beta \leq 180^\circ$ nicht erfüllen, erhalten wir mit (5.5) die Additionssätze analog zu den Umformungen im vorangegangenen Beweis.

Beispielhaft führen wir den Nachweis für a) im Fall $\alpha \in [180^\circ, 270^\circ]$, also $\alpha = 180^\circ + \delta$ mit $\delta = \alpha - 180^\circ \in [0, 90^\circ]$ und $\beta \in [0, 90^\circ]$. Wir dürfen die Aussage des Satzes also für die Winkel δ und β benutzen:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(180^\circ + \delta + \beta) = -\sin(\delta + \beta) = -\sin(\delta) \cdot \cos(\beta) - \cos(\delta) \cdot \sin(\beta) \\
&= -(-\sin(\alpha)) \cdot \cos(\beta) - (-\cos(\alpha)) \cdot \sin(\beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)
\end{aligned}$$

ZWEITER BEWEIS: Für die Aussagen a) und c) wird für den Fall $0 \leq \alpha, \beta \leq \alpha + \beta \leq 180^\circ$ noch ein weiterer Beweis angegeben, der auf einer geometrischen Betrachtung am Einheitskreis beruht (s. Skizze):

Aus den Winkelsummen in den Dreiecken $\triangle OEG$ und $\triangle CDE$

$$180^\circ = \alpha + \varepsilon + 90^\circ \quad \text{und} \quad 180^\circ = \delta + \varepsilon + 90^\circ$$

entnehmen wir

$$\alpha = \delta.$$

In den Dreiecken $\triangle ODC$, $\triangle OAB$, $\triangle OGC$ mit der Hypotenuse 1 berechnen wir

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= |DC| = |DH| + |HC| = |FG| + |HC| \\
&= (|AB| : |OB|) \cdot |OG| + |GC| \cdot \cos(\alpha) \\
&= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= |OD| = |OF| - |DF| = |OF| - |HG| \\
&= \cos(\alpha) \cdot |OG| - \sin(\alpha) \cdot |CG| \\
&= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta).
\end{aligned}$$

◇

Aus den Additionssätzen folgen weitere nützliche Gleichungen. Setzen wir $\alpha = \beta$, so erhalten wir

Regel 5.24

$$(a) \quad \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha), \quad (b) \quad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

◇

Addieren und Subtrahieren wir (2) zu/von der Gleichung $1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$ (5.2), so erhalten wir

$$1 + \cos(2\alpha) = 2 \cdot \cos^2(\alpha) \quad \text{und} \quad 1 - \cos(2\alpha) = 2 \cdot \sin^2(\alpha),$$

woraus wir sofort folgende Regel erhalten

Regel 5.25

$$(a) \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}, \quad (b) \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

◇

Addieren wir 5.23 a) und b), beziehungsweise 5.23 c) und d) oder bilden wir die Differenz von 5.23 c) und 5.23 d), so erhalten wir (s. Übungen)

Regel 5.26

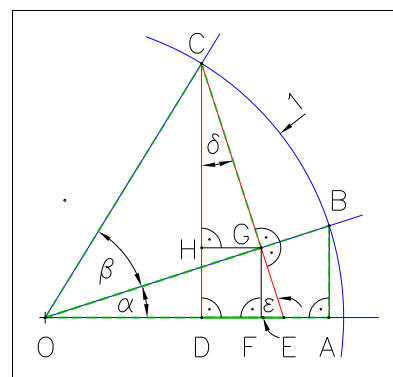


Abb. 5.14: Additionssätze

$$(a) \quad \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$(b) \quad \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$(c) \quad \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

◇

Die beiden letzten Regeln erlauben, quadratische Terme durch nicht-quadratische Terme und Produktterme durch Summenterme zu ersetzen. Dies sind zum Beispiel bei der Integration entscheidende Umformungen.

§ 6 Kreisfunktionen

6.A Graphen und Periode der Kreisfunktionen

Beispiel 6.1 (Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion) Abb. 6.1 Sinus- und Kosinusfunktion. Die in (5.5) aufgeführten Eigenschaften sind an diesen Graphen leicht zu erkennen. Abb. 6.2 enthält die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktionen mit halber Frequenz, also doppelter Periode, rechts unten mit vierfacher Frequenz.

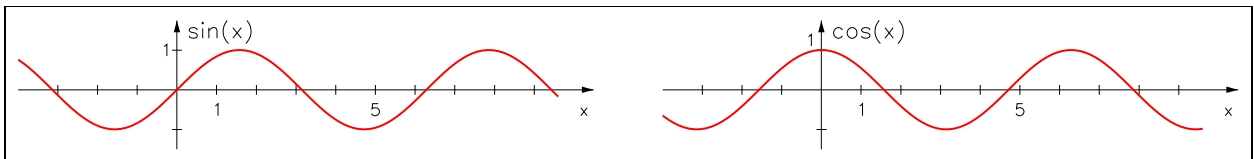


Abb. 6.1: Sinus und Kosinus

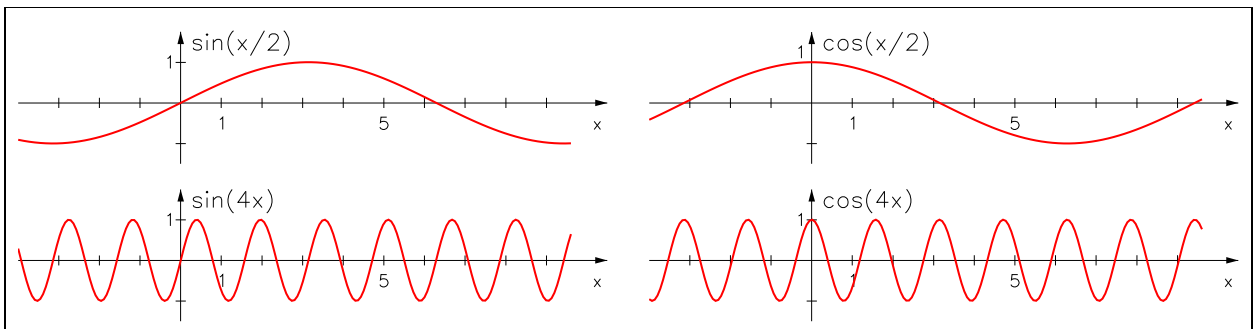


Abb. 6.2: Sinus und Kosinus mit halber und vierfacher Frequenz

Beispiel 6.2 (Graphen der Tangens- und Kotangensfunktion) Abb. 6.3 zeigt die Tangens- und Kotangensfunktion. Die in Regel 5.5 aufgeführten Eigenschaften sind an diesen Graphen leicht zu erkennen. Die unterbrochenen Linien geben die Polstellen an. Diese liegen für die Tangensfunktion bei $x = \dots, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots$ und für die Kotangensfunktion bei $x = \dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$.

Alle folgende Regeln ergeben sich aus den entsprechenden Regeln für die Sinus- und Kosinusfunktion in 5.5. Man kann sie auch gut an den Graphen erkennen.

Regel 6.3 (Regeln für Tangens und Kotangens)

$$(a) \quad \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

$$(b) \quad \cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\cot(x)$$

$$(c) \quad \tan(\pi/2 - x) = \frac{\sin(\pi/2 - x)}{\cos(\pi/2 - x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$$

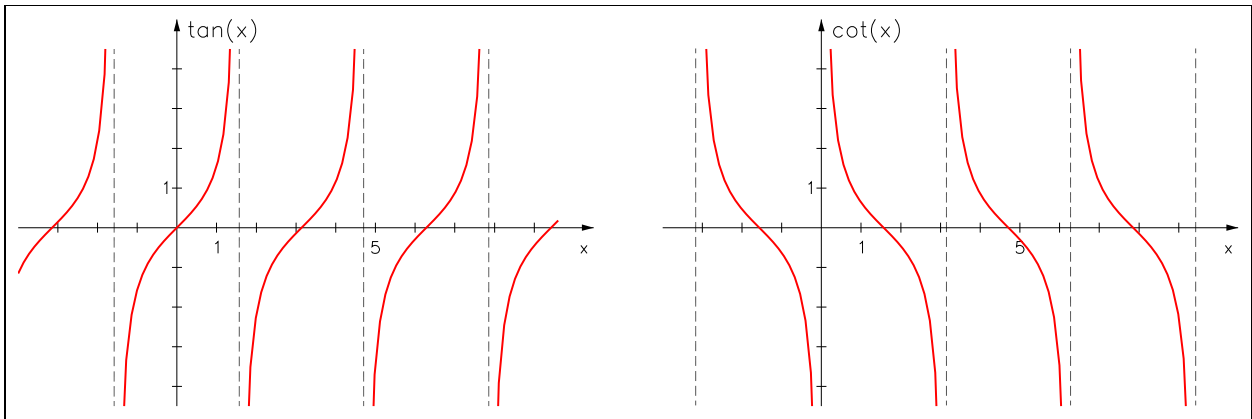


Abb. 6.3: Tangens und Kotangens

$$(d) \cot(\pi/2 - x) = \dots = \tan(x)$$

$$(e) \tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

$$(f) \cot(\pi + x) = \dots = \cot(x)$$

◇

Nach Regel 5.5 wiederholen sich die Sinus- und Kosinusfunktion nach 2π , nach 6.3 die Tangens- und Kotangensfunktion nach π . Dieses Verhalten der Kreisfunktionen nennt man periodisch. Wir legen den genauen Sprachgebrauch fest:

Definition 6.4 (Periodische Funktionen) Hat eine Funktion f für alle Elemente ihres Definitionsbereichs ($x \in \mathbb{D}_f$) die Eigenschaft

$$f(x + P) = f(x) \quad \text{mit} \quad P > 0$$

und ist P die Periode der Funktion f und die Funktion f nennt man P -periodisch.

Nach obigen Formeln sind die Sinus- und Kosinusfunktion 2π -periodisch, die Tangens- und Kotangensfunktion π -periodisch.

Beispiel 6.5

$$(a) \cos\left(-\frac{31}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{31}{4}\pi + 8\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(b) \cos(225^\circ) = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(c) \sin(225^\circ) = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

6.B Gleichungen mit Kreisfunktionen

Beispiel 6.6 Geben Sie die Lösung der Gleichung $\sin(-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ an.

LÖSUNG: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$:

$$\sin(-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left(\frac{2\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + \pi\mathbb{Z} \right).$$

Beispiel 6.7 Geben Sie die Lösung der Gleichung $\sin(x) + \cos(x) = 1$ an.

LÖSUNG: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(x) + \cos(x) &= 1 && |^2 \\ \implies (\sin(x) + \cos(x))^2 &= 1 \\ \iff \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \iff \sin(x)\cos(x) &= 0 \\ \iff \sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0 \\ \iff x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi &\text{ mit } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Da die erste Umformung keine Äquivalenzumformung ist, müssen die Ergebnisse überprüft werden. Wegen der Periode 2π der Sinus- und Kosinusfunktion können wir uns auf die Werte $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ einschränken:

$$\begin{aligned} x = 0 &: 0 + 1 = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} &: 1 + 0 = 1 \\ x = \pi &: 0 - 1 \neq 1 \\ x = \frac{3\pi}{2} &: -1 + 0 \neq 1 \end{aligned}$$

Als Lösungsmenge ergibt sich hieraus

$$L = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \right).$$

Beispiel 6.8 Geben Sie die Lösung der Gleichung $\cos(x) + \cos(2x) = 0$ an.

LÖSUNG: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(x) + \cos(2x) &= 0 && | \cos(2x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1 \quad (\text{s. 5.25}) \\ \iff \cos(x) + 2 \cdot \cos^2(x) - 1 &= 0 && | \text{Substitution: } u := \cos(x) \\ \iff 2 \cdot u^2 + u - 1 &= 0 && | : 2 \\ \iff u^2 + \frac{u}{2} - \frac{1}{2} &= 0 && | \text{p-q-Formel} \\ \iff u_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} &= -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} && | \text{Rücksubstitution} \\ \iff \cos(x) = \frac{1}{2} \vee \cos(x) = -1 \\ \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi &\text{ mit } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Als Lösungsmenge ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{ \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot \mathbb{Z} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot \mathbb{Z} \right) \cup (\pi + 2\pi \cdot \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

6.C Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz

Definition 6.9 Eine Schwingung wird allgemein durch $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ mit $A > 0$ beschrieben. Hierbei heißen A Amplitude, ω Kreisfrequenz und φ Phasenwinkel.

Bei positivem Phasenwinkel φ eilt die Schwingung $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ mit $A > 0$ der Standardschwingung $g(t) = A \sin(\omega t)$ um den Phasenwinkel φ und um die *Phasenverschiebung*

$$t = \frac{\varphi}{\omega}$$

voraus, sie ist um $t = \varphi/\omega$ nach links verschoben.

Bemerkung 6.10 (Nullstellen) Eine Nullstelle von $f(t)$ wird ermittelt:

$$\omega t + \varphi = 0 \iff \omega t = -\varphi \iff t = -\frac{\varphi}{\omega}.$$

Für $\varphi \in (-2\pi, 0)$ ist $t = -\frac{\varphi}{\omega}$ die kleinste positive, für $\varphi \in (0, 2\pi)$ die größte negative Nullstelle mit positiver Steigung von $f(t)$.

Das linke Bild in Abb. 6.4 zeigt eine Schwingung mit dem Phasenwinkel -0.5 , das rechte wegen $\cos(2t + 0.5) = \sin(2t + \frac{\pi}{2} + 0.5)$ eine Schwingung mit dem Phasenwinkel $\frac{\pi}{2} + 0.5$.

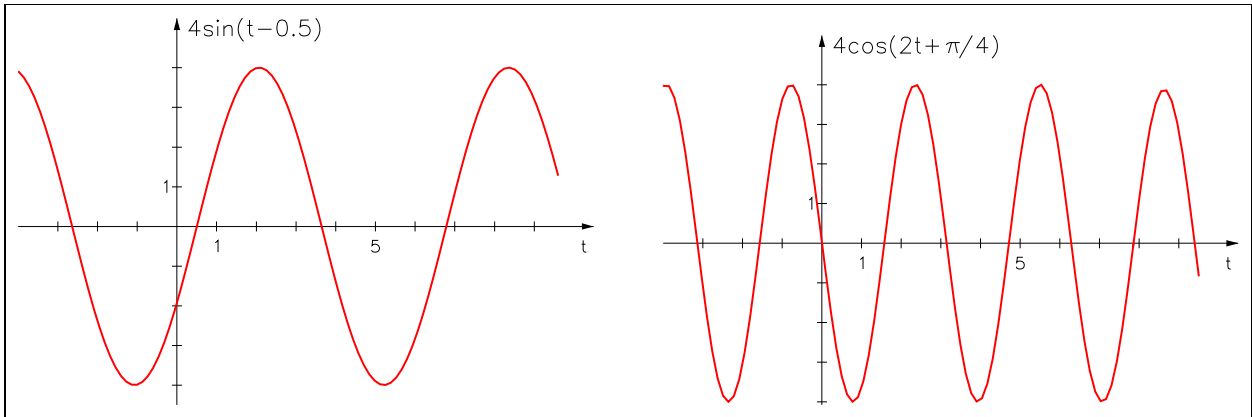


Abb. 6.4: Phasenverschobene Schwingungen

Bemerkung 6.11 (Periode) Die Periode der Funktion $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ ist $\frac{2\pi}{\omega}$, denn

$$\begin{aligned} f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) &= A \sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) \\ &= A \sin(\omega t + 2\pi + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi) = f(t) \end{aligned}$$

Das linke Bild in Abb. 6.4 zeigt eine Schwingung mit dem Periode 2π , das rechte mit der Periode π .

Definition 6.12 (Überlagerung von Schwingungen) Die Überlagerung von zwei Schwingungen wird berechnet durch die punktweise Addition ihrer Funktionswerte.

Überlagerung@Überlagerung

Haben beide gleiche Frequenz (Periode), so ist auch die Überlagerung eine einfache Schwingung mit dieser Frequenz. Amplitude und Phasenwinkel ändern sich. Das nebenstehende Bild zeigt die Überlagerung der Sinusfunktion $f_1(t) = \sin(t)$ und der Kosinusfunktion $f_2(t) = \cos(t) = \sin(t + \pi/2)$.

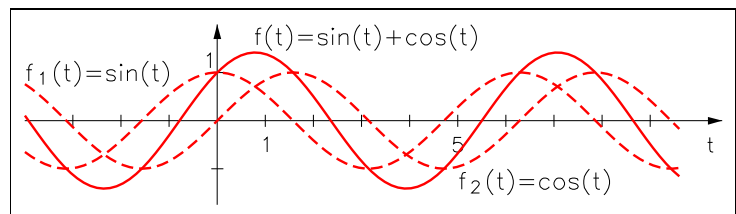


Abb. 6.5: Überlagerte Schwingung

Wir berechnen jetzt die Amplitude und den Phasenwinkel von überlagerten Schwingungen gleicher Frequenz, zunächst für zwei Sinusschwingungen

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = A_1 \cos(\varphi_1) \sin(\omega t) + A_1 \sin(\varphi_1) \cos(\omega t) \\ f_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A_2 \cos(\varphi_2) \sin(\omega t) + A_2 \sin(\varphi_2) \cos(\omega t) . \end{aligned}$$

Für die Summe

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \\ &= (A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)) \sin(\omega t) + (A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

machen wir den Ansatz

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \cos(\varphi) \sin(\omega t) + A \sin(\varphi) \cos(\omega t) .$$

also

$$\begin{aligned} & A \cos(\varphi) \sin(\omega t) + A \sin(\varphi) \cos(\omega t) \\ &= (A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)) \sin(\omega t) + (A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Ein Vergleich bei $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ oder Einsetzen von $t = 0$ und $t = \pi/2\omega$ liefert

$$\begin{aligned} A \cos(\varphi) &= A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2) \text{ und} \\ A \sin(\varphi) &= A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Amplitude, wenn wir die Additionssätze mit berücksichtigen,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A \cos(\varphi))^2 + (A \sin(\varphi))^2} \\ &= \sqrt{(A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2))^2 + (A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2))^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + A_2^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + A_2^2}. \end{aligned}$$

und für den Phasenwinkel

$$\tan(\varphi) = \frac{A \sin(\varphi)}{A \cos(\varphi)} = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)}.$$

Diese Ergebnisse fassen wir zusammen:

Satz 6.13 (Überlagerung) Die Überlagerung der beiden Schwingungen

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = A_1 \cos(\varphi_1) \sin(\omega t) + A_1 \sin(\varphi_1) \cos(\omega t) \\ f_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A_2 \cos(\varphi_2) \sin(\omega t) + A_2 \sin(\varphi_2) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

ist

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

mit der Amplitude

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + A_2^2}.$$

und dem Phasenwinkel

$$\tan(\varphi) = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)}.$$

Bei der Berechnung des Phasenwinkels $\varphi \in [0; 2\pi)$ muss berücksichtigt werden, in welchem Quadranten der Punkt $(A \cos(\varphi); A \sin(\varphi))$ liegt. Man kann auch aufgrund des Graphen zwischen den beiden Möglichkeiten entscheiden.

Die Formel für die Amplitude erinnert sehr an den Kosinussatz. Mit Hilfe der Vektorrechnung (Addition von Vektoren) kann man sie auch tatsächlich mit dessen Hilfe herleiten.

Beispiel 6.14 Für das skizzierte Beispiel mit $f_1(t) = \sin(t)$ und $f_2(t) = \cos(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2})$ erhalten wir

$$A = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \left(\cos(0) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(0) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Der Punkt

$$(A \cos(\varphi); A \sin(\varphi)) = \sqrt{2} \cdot \left(\sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right); \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \sqrt{2} \cdot (1; 1)$$

liegt im ersten Quadranten, also folgt aus

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(0) + \sin(\frac{\pi}{2})}{\cos(0) + \cos(\frac{\pi}{2})} = 1 \quad \text{sofort} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

Das Ergebnis lautet damit

$$f(t) = \sqrt{2} \sin(t + \pi/4),$$

eine Schwingung mit der Amplitude $\sqrt{2}$, der Periode 2π und der Phasenverschiebung $\pi/4$. ◇

Bemerkung 6.15 Ist, wie in diesem Beispiel, eine dieser Schwingungen durch die Kosinusfunktion beschrieben, so erhalten wir andere Umrechnungsformeln. Ersetzen wir die Kosinusfunktion durch die Sinusfunktion

$$\cos(\omega t + \varphi_2) = \sin(\omega t + \varphi_2 + \pi/2),$$

so erhalten wir mit Satz (6.13)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\varphi_1 - \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right)\right) + A_2^2} = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right) + A_2^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + A_2^2} \end{aligned}$$

und

$$\tan(\varphi) = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) - A_2 \sin(\varphi_2)}.$$

Analog werden ggf. vor der Berechnung ersetzt:

$$\begin{aligned} -\sin(\omega t + \varphi_2) &= \sin(\omega t + \varphi_2 + \pi) \\ -\cos(\omega t + \varphi_2) &= \cos(\omega t + \varphi_2 + \pi) = \sin\left(\omega t + \varphi_2 + \frac{3}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

◇

§ 7 Exponential- und Logarithmusfunktionen

7.A Potenzen

Definition 7.1 (Potenzen mit ganzen Exponenten) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$(a) \quad a^0 := 1 \qquad (b) \quad a^n := a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \qquad (c) \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n} \quad \text{für } a \neq 0$$

Regel 7.2 Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gelten:

(a)

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n}$$

(b)

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot \dots \cdot a^m}_n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n} = a^{m \cdot n}$$

(c)

$$(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_m = a^m \cdot b^m$$

(d)

$$\frac{a^m}{b^n} = a^m \cdot \frac{1}{b^n} = a^m \cdot b^{-n}$$

(e)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} = a^m \cdot b^{-m}$$

Was bedeutet $a^{1/n}$? Bei der Definition dieses Ausdrucks sollen die obigen Regeln erhalten bleiben. Es soll also

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a$$

gelten. Damit ist $a^{1/n}$ die n-te Wurzel aus a. Da nur positive Zahlen beliebige natürliche Wurzeln besitzen, definieren wir

Definition 7.3 (Potenzen mit rationalen Exponenten)

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \quad \text{für } a \geq 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Regel 7.4 Für $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gelten:

$$(a) \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (b) \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{l}{k}} = a^{\frac{ml}{nk}}$$

Beispiel 7.5

(a) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $\left(\frac{\sqrt[4]{a}\sqrt{b^2}(a^3c^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{a^3b^6}\sqrt[3]{c^4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ definiert?

$\sqrt[4]{a}$ verlangt $a \geq 0$, $\sqrt{b^2}$ kann für jedes $b \in \mathbb{R}$ berechnet werden, $(a^3c^2)^{\frac{1}{2}}$ verlangt $a \geq 0$. $\sqrt[4]{a^3b^6}$ verlangt $a \geq 0$, $\sqrt[3]{c^4}$ kann für jedes $c \in \mathbb{R}$ berechnet werden. Der Nenner verlangt $a, b, c \neq 0$, Kehrwert nehmen erfordert einen von Null verschiedenen Zähler, also wieder $a, b, c \neq 0$. Insgesamt folgt

$$\mathbb{D} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a > 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0\}.$$

Innerhalb dieses Definitionsbereichs gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt[4]{a}\sqrt{b^2}(a^3c^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{a^3b^6}\sqrt[3]{c^4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{a^{3/4}|b|^{3/2}|c|^{4/3}}{a^{1/4}|b|^{3/2}|c|}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \left(a^{3/4-1/4-3/2}|b|^{3/2-1}|c|^{4/3-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{-1}|b|^{1/2}|c|^{1/3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[4]{|b|^6}\sqrt[3]{|c|}}{\sqrt{a}} \\ & = \frac{\sqrt{a}\sqrt[4]{|b|^6}\sqrt[3]{|c|}}{a} \end{aligned}$$

Der letzte Term enthält einen wurzelfreien Nenner. In dieser Form sind in der Regel all Ergebnisse anzugeben.

(b) Der Term

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge (x > 0 \vee y > 0)\}$. Wir betrachten die beiden Fälle

$x \neq y$: Um eine wurzelfreie Darstellung zu erhalten, erweitern wir den Bruch mit $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ und erhalten mit der 3. binomischen Formel:

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

$x = y$:

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{2x}{2\sqrt{x}}$$

Definition 7.6 (Potenzen mit reellen Exponenten) Für $a \geq 0$ und eine irrationale Zahl $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wollen wir a^r definieren. Hierzu wählen wir eine rationale, gegen r konvergierende Zahlenfolge $\langle q_n \rangle$. Für die Zahlenfolge q_n gilt, dass $q_n \in \mathbb{Q}$; $n \in \mathbb{N}$. Die irrationale Zahl erhalten wir mit $r = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ und definieren

$$a^r := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}.$$

a^r ist damit immer eine positive reelle Zahl ($a^r \in \mathbb{R}_{>0}$)

7.B Exponentialfunktionen

Definition 7.7 (Exponentialfunktion) Für $a > 0$ werden die Exponentialfunktionen $\exp_a(x) = a^x$ zur Basis a definiert durch $\exp_a = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x & \mapsto a^x \end{array} \right\}$.

Regel 7.8 Für $a > 0$ gelten:

$$(a) \exp_a(0) = a^0 = 1$$

$$(b) \exp_a(1) = a^1 = a$$

$$(c) \exp_a(-1) = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

- (d) $\exp_a(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = \exp_a(x) \exp_a(y)$
- (e) Für $a > 1$ gelten (vgl. Abb. 7.1):
- (e1) \exp_a ist streng monoton wachsend.
 - (e2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_a(x) = \infty$
 - (e3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0$, d.h. $y = 0$ ist eine Asymptote bei $x = -\infty$.
- (f) Für $0 < a < 1$ gelten (vgl. Abb. 7.1):
- (f1) \exp_a ist streng monoton fallend.
 - (f2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_a(x) = 0$, d.h. $y = 0$ ist eine Asymptote bei $x = \infty$.
 - (f3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = \infty$:

Bemerkung 7.9 (Wichtige Basen) Häufig benutzt werden die Basen

- (a) $a=2$: duale Basis (b) $a=10$: dekadische Basis (c) $a=e$: natürliche Basis, s.u.

7.C Eulersche Zahl

Definition 7.10 (Eulersche¹ Zahl) Die Eulersche Zahl e wird als Grenzwert einer Folge definiert:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281829 \dots \notin \mathbb{Q}.$$

Die Eulersche Zahl ist irrational. Dies weisen wir hier nicht nach.

Die nebenstehende Tabelle enthält Näherungen für e .

Bei der natürlichen Exponentialfunktion wird in der Regel der Index e nicht geschrieben:

$$\exp(x) := \exp_e(x) = e^x.$$

Diese Funktion spielt in der Mathematik und in den Anwendungen in Wissenschaft, Technik, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften eine große Rolle, auf die wir hier nicht eingehen können.

Die Exponentialfunktionen sind streng monoton, damit injektiv (eindeutig) und somit umkehrbar (vgl. Abb. 7.1). Ihre Umkehrungen sind die Logarithmusfunktionen.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$
3	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.\overline{370}$
4	$\left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \approx 2.44140$
5	$\left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} \approx 2.48832$
10	$\left(\frac{11}{10}\right)^{10} \approx 2.59874$
100	$\left(\frac{101}{100}\right)^{100} \approx 2.70481$
1000	$\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \approx 2.71692$
10000	$\left(\frac{10001}{10000}\right)^{10000} \approx 2.71815$

7.D Logarithmusfunktionen

Definition 7.11 (Logarithmusfunktion) Für $a > 0$ und $a \neq 1$ definieren wir die Logarithmusfunktion

$$\log_a : y = \log_a(x) \iff x = \exp_a(y) = a^y.$$

Der Definitionsbereich der Logarithmusfunktion ist gleich der Wertebereich der Exponentialfunktion, also gleich $\mathbb{R}_{>0}$. Sie sind damit nur für positive reelle Zahlen definiert. Ihr Bildbereich ist gleich dem Definitionsbereich der Exponentialfunktionen, also gleich der gesamten Menge der reellen Zahlen:

$$\log_a = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_{>0} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \log_a(x) \end{array} \right\}.$$

¹L. Euler, schweizer Mathematiker in Berlin und St. Petersburg, 1707 - 1783

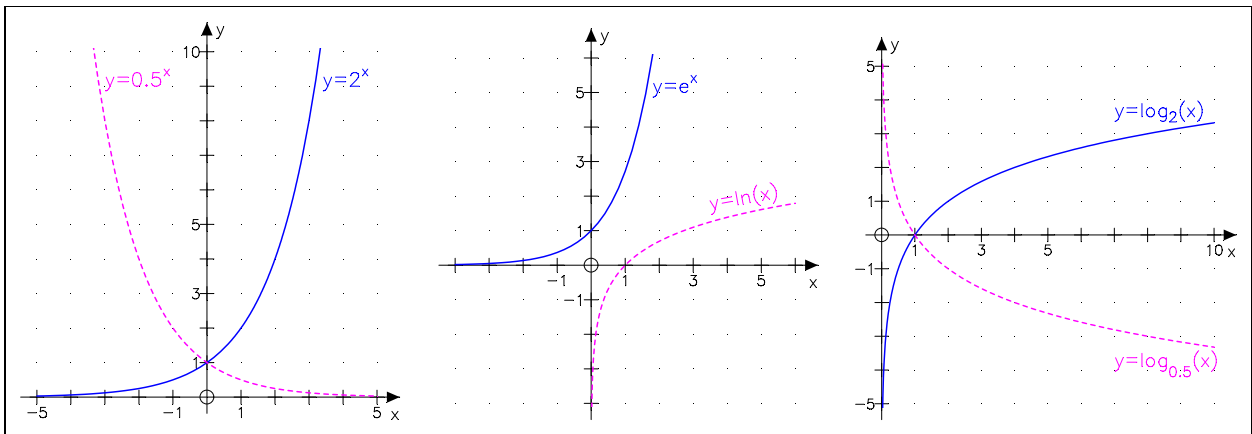


Abb. 7.1: Exponential- und Logarithmusfunktion

Bemerkung 7.12 (Monotonie und Polstellen)

- (a) Für $a < 1$ sind die Logarithmusfunktionen streng monoton fallend, für $a > 1$ streng monoton steigend.
 (b) Bei $x = 0$ haben sie eine Polstelle, denn $y = 0$ ist eine Asymptote der Exponentialfunktionen.
 (c) Bei den Grenzwerteigenschaften gilt eine Analogie:

$$0 < a < 1 :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = -\infty ,$$

$$1 < a :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \infty .$$

Regel 7.13 Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}$ gelten:

- | | |
|---|---|
| (a) $\log_a(1) = 0,$ | denn $a^0 = 1.$ |
| $\log_a(a) = 1,$ | denn $a^1 = a.$ |
| $\log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1,$ | denn $a^{-1} = \frac{1}{a}.$ |
| $\log_a(a^x) = x,$ | denn $a^x = a^x.$ |
| $a^{\log_a(x)} = x$ für $x > 0,$ | denn $\exp_a(\log_a(x)) = x.$ |
| (b) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y),$ | denn $a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = xy.$ |
| $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$ | denn $\log_a(x) = \log_a\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) + \log_a(y).$ |
| $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y),$ | denn $\log_a(1) = 0.$ |
| (c) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x),$ | denn $a^{y \cdot \log_a(x)} = a^{\log_a(x) \cdot y} = (a^{\log_a(x)})^y = x^y.$ |
| (d) $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ oder | denn $b^{\log_b(a) \cdot \log_a(x)} = (b^{\log_b(a)})^{\log_a(x)} = a^{\log_a(x)} = x.$ |
| $\log_b(a) \cdot \log_a(x) = \log_b(x),$ | |

Die Logarithmusfunktionen unterscheiden sich durch Streckung der Funktionswerte.

- (e) $a^x = b^{x \cdot \log_b(a)},$ denn $a^x = (b^{\log_b(a)})^x = b^{x \cdot \log_b(a)}.$

Die Exponentialfunktionen unterscheiden sich durch Streckung der Argumente.

Definition 7.14 (Logarithmusfunktionen zu speziellen Basen)

- (a) natürlicher Logarithmus (zur Basis e):

$$\ln(x) := \log_e(x) \quad \text{auch:} \quad \log(x) := \log_e(x)$$

- (b) dekadischer Logarithmus (Zehnerlogarithmus, zur Basis 10):

$$\lg(x) := \log_{10}(x)$$

(c) *dualer (binärer) Logarithmus (Zweierlogarithmus, zur Basis 2):*

$$\text{ld}(x) := \log_2(x) \quad \text{auch:} \quad \text{lb}(x) := \log_2(x)$$

Abb. 7.1 zeigt Ausschnitte der natürlichen Logarithmusfunktion mit dem deutlich zu erkennenden Pol bei $x = 0$. Für $a > 1$ wachsen diese Funktionen sehr langsam, sie haben aber immer positive Steigung. Dies wird später (8.5) mit Hilfe der Ableitungen gezeigt.

Beispiel 7.15 (vgl. [?, S.68])

(a) Der erste Term hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{(x, a, b) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0 \wedge a > 0 \wedge b > 0\}$. Hier gilt

$$\ln\left(x^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) = \ln(x^2) + \ln(\sqrt[3]{a}) - \ln(\sqrt{b}) = 2 \ln(|x|) + \frac{1}{3} \ln(a) - \frac{1}{2} \ln(b)$$

(b) Die Gleichung $2^{\ln(x)} \cdot x^{2+\ln(x)} = \frac{1}{4}$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{>0}$.

$$\begin{aligned} 2^{\ln(x)} \cdot x^{2+\ln(x)} = \frac{1}{4} &\iff 2^{\ln(x)} \cdot x^{2+\ln(x)} = 2^{-2} \\ &\iff 2^{\ln(x)} \cdot x^{\ln(x)} = 2^{-2} \cdot x^{-2} \\ &\iff (2x)^{\ln(x)} = (2x)^{-2} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Diese Gleichung ist für $x = \frac{1}{2}$ immer erfüllt. Für $x \neq \frac{1}{2}$ ist die Basis der Exponentialfunktion verschieden von 1, damit sind auch Exponenten gleich!

$$(7.1) \iff \ln(x) = -2 \iff x = e^{-2}$$

Damit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1/2, e^{-2}\}$. ◇

(c) Die Gleichung $x^{\ln(x)} = 2$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{>0}$. Sie wird gelöst:

$$\begin{aligned} x^{\ln(x)} = 2 &\iff \ln(x^{\ln(x)}) = \ln(2) \iff \ln(x) \cdot \ln(x) = \ln(2) \\ &\iff (\ln(x))^2 = \ln(2) \iff \ln(x) = \pm \sqrt{\ln(2)} \\ &\iff x = e^{\pm \sqrt{\ln(2)}} \implies \mathbb{L} = \{e^{\sqrt{\ln(2)}}, e^{-\sqrt{\ln(2)}}\} \end{aligned} \quad \diamond$$

(d) Die Gleichung $x^x = 5$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{>0}$:

$$\begin{aligned} x^x = 5 &\iff \ln(x^x) = \ln(5) \quad (\mathbb{D} = \mathbb{R}_{>0}) \\ &\iff x \cdot \ln(x) = \ln(5) \\ &\iff \ln(x) = \frac{\ln(5)}{x} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nicht analytisch gelöst werden. Numerische Verfahren, die in den Mathematik-Vorlesungen behandelt werden, liefern Näherungslösungen.

Mit den aus der Schule bekannten Mitteln kann man eine grafische Näherungslösung ermitteln: Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = \ln(5)/x$. Der Abszissenwert des Schnittpunkts ist die gesuchte Lösung!

(e) *Ein Sparer spart jedes Jahr 100 € zu einem festen Zinssatz von 7% p.a. Wieviele Jahre dauert es, bis er 100 000 € einschließlich Zinsen angespart hat?*

LÖSUNG: Gehen wir davon aus, dass er den Betrag immer zu Beginn eines Jahres zur Bank gibt und fragen wir nach dem Kapital einschließlich Zinsen am Ende des n-ten Jahres, so liegt eine geometrische Reihe vor, deren Summe wir einer Formelsammlung entnehmen:

$$K(n) = \sum_{i=1}^n 100 \cdot 1.07^i = 100 \cdot \frac{1.07^{n+1} - 1.07}{1.07 - 1} = 107 \cdot \frac{1.07^n - 1}{0.07}$$

Für welches $n \in \mathbb{N}$ ist erstmals $K(n) \geq 100000 \text{€}$?

$$\begin{aligned} 100000 &\leq 107 \cdot \frac{1.07^n - 1}{0.07} \iff \frac{100000 \cdot 0.07}{107} \leq 1.07^n - 1 \\ &\iff 1 + \frac{7000}{107} \leq 1.07^n \\ &\iff n \geq \log_{1.07} \left(\frac{7107}{107} \right) \approx 62.017 \end{aligned}$$

Die gesamte Sparphase dauert damit 63 Jahre.

7.E Logarithmisches Papier

Bemerkung 7.16 (Millimeterpapier) Erwartet man bei der Auswertung eines Versuches, dass alle gemessenen Werte auf einer Geraden $y = ax + b$ liegen, so kann man sie auf Millimeterpapier auftragen und nach Augenmaß die „beste“ Gerade einzeichnen. Die Parameter a und b der Geraden kann man dann auf dem Millimeterpapier ablesen: Der Punkt $(0, b)$ ist der Schnittpunkt mit der y-Achse, a kann an einem Steigungsdreieck abgelesen werden. Statt die Werte abzulesen, kann man sie auch messen, sofern das Millimeterpapier unverzerrt und beide Achsen 1:1 bemaßt sind.

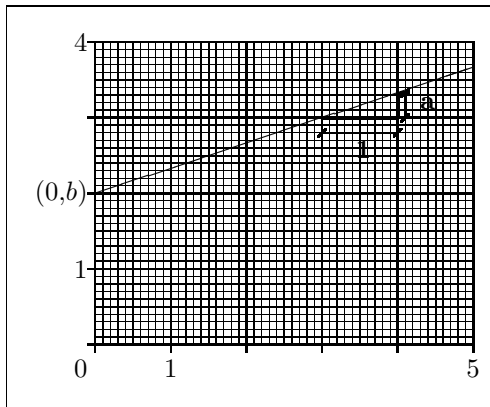


Abb. 7.2: Millimeterpapier

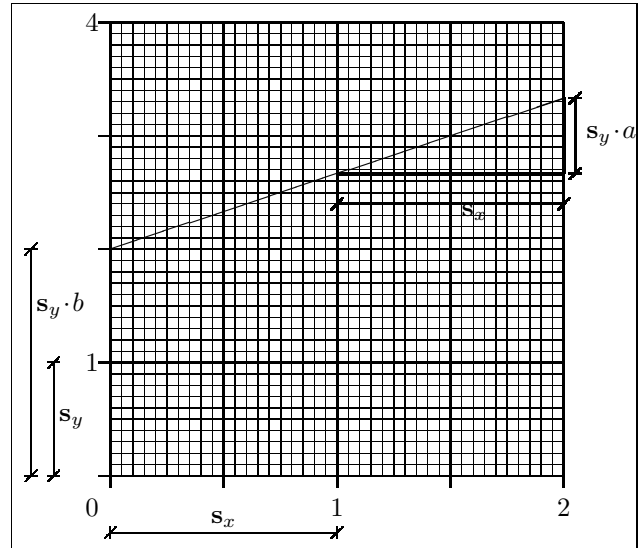


Abb. 7.3: Millimeterpapier verzerrt

Verfahren 7.17 (Verzerrtes Millimeterpapier) Ist das Millimeterpapier verzerrt oder beide Achsen unterschiedlich bemaßt, so müssen beim Abmessen die Einheitslängen s_x und s_y auf den beiden Achsen berücksichtigt werden: Wir messen

- den Ordinatenabstand $\tilde{b} = s_y \cdot b$ und berechnen $b = \frac{\tilde{b}}{s_y}$.
- die vertikale Kathete des Steigungsdreiecks $\tilde{a} = a \cdot s_y$ bei horizontaler Kathete s_x und berechnen die Steigung $a = \frac{\tilde{a}}{s_x}$.

In der Zeichnung sind $s_x = 3$ cm, $s_y = 1.5$ cm, $\tilde{a} = 1$ cm und $\tilde{b} = 3$ cm. Hieraus folgen $a = \frac{2}{3}$ und $b = 2$.

Hängen die gemessenen physikalischen Größen nicht linear voneinander ab, so können die Funktionsparameter in der Regel nicht so einfach bestimmt werden. Wir werden jedoch noch zwei spezielle Situationen behandeln, in denen die Bestimmung der Parameter möglich ist.

Verfahren 7.18 (Bestimmen der Parameter einer Exponentialfunktion)

Ist der physikalische Zusammenhang zwischen den Messwerten (x, y) durch eine Exponentialfunktion

$$y = b \cdot a^x$$

gegeben, so kann man die zu ermittelnden Parameter durch Logarithmieren bestimmen:

$$\lg(y) = \lg(b) + x \cdot \lg(a)$$

ist eine lineare Gleichung und

$$\{(x, \lg(y)) \mid \lg(y) = \lg(a) \cdot x + \lg(b)\}$$

ein Gerade durch $(0, \lg(b))$ mit der Steigung $\lg(a)$. Zur Vereinfachung des Eintragens der logarithmisierten Messwerte $\lg(y)$ benutzt man einfach-logarithmisches Papier.

Zur Ermittlung der Parameter a und b lesen wir zum Beispiel

- $y_0 = y(0) = b$ und
- $y_1 = y(1) = b \cdot a$

ab, kennen damit b und berechnen

$$a = \frac{y_1}{y_0} .$$

Gehen wir in der Zeichnung von einem Koordinatenursprung $(\lg(1), 0) = (0, 0)$ in der linken unteren Ecke aus, so lesen wir $y_0 \approx 42$ und $y_1 \approx 7.5$ ab und erhalten

$$y(x) \approx 42 \cdot \left(\frac{7.5}{42}\right)^x \approx 42 \cdot 0.179^x .$$

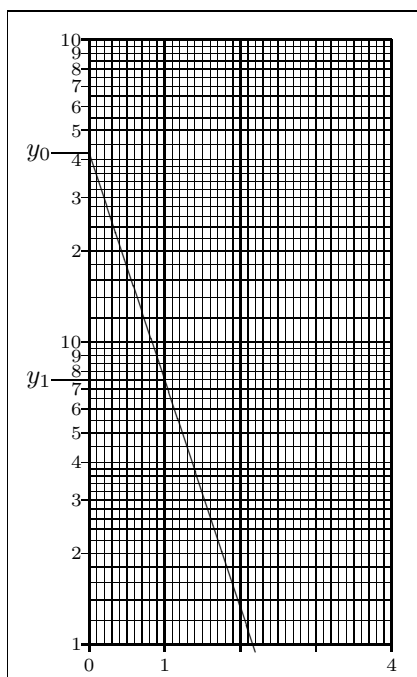


Abb. 7.4: Einfach-logarithm. Papier

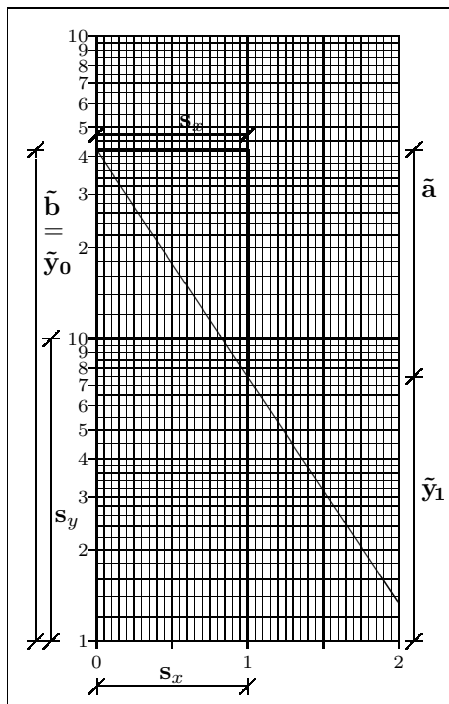


Abb. 7.5: Einfach-log. Papier, verzerrt

Verfahren 7.19 (Messmethode) Das Ablesen der Funktionswerte $y(1)$ und $y(2)$ (oder $y(0)$ und $y(1)$) kann stark fehlerbehaftet sein. Genauer ist das Abmessen der Werte, man erhält in diesem Fall aber den Logarithmus der Funktionswerte, die zusätzlich noch um die Einheitslängen verzerrt sind.

Wir messen

- den verzerrten Ordinatenabschnitt $\tilde{y}_0 = \tilde{b} = \lg(b) \cdot s_y$ und erhalten

$$b = y_0 = 10^{\tilde{b}/s_y} ,$$

- die vertikale Kathete des Steigungsdreiecks $\tilde{a} = \lg(a) \cdot s_y$ bei horizontaler Kathete s_x und berechnen die Basis der Exponentialfunktion

$$a = 10^{\tilde{a}/s_y} \quad \text{oder}$$

- den verzerrten logarithmischen Funktionswert $\tilde{y}_1 = \lg(y_1) \cdot s_y$ und berechnen die Basis der Exponentialfunktion

$$a = \frac{y_1}{y_0} = \frac{10^{\tilde{y}_1/s_y}}{10^{\tilde{y}_0/s_y}} = 10^{(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_0)/s_y}$$

In der Zeichnung sind $s_x = 2 \text{ cm}$, $s_y = 4 \text{ cm}$, $\tilde{a} = -3 \text{ cm}$ und $\tilde{b} = 6.5 \text{ cm}$.

Hieraus folgen $a = 10^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1000}} \approx 0.178$ und $b = 10^{\frac{6.5}{4}} \approx 42.17$ und die gesuchte Funktion lautet näherungsweise

$$y(x) \approx 42.17 \cdot 0.178^x$$

7.F Doppelt-logarithmisches Papier

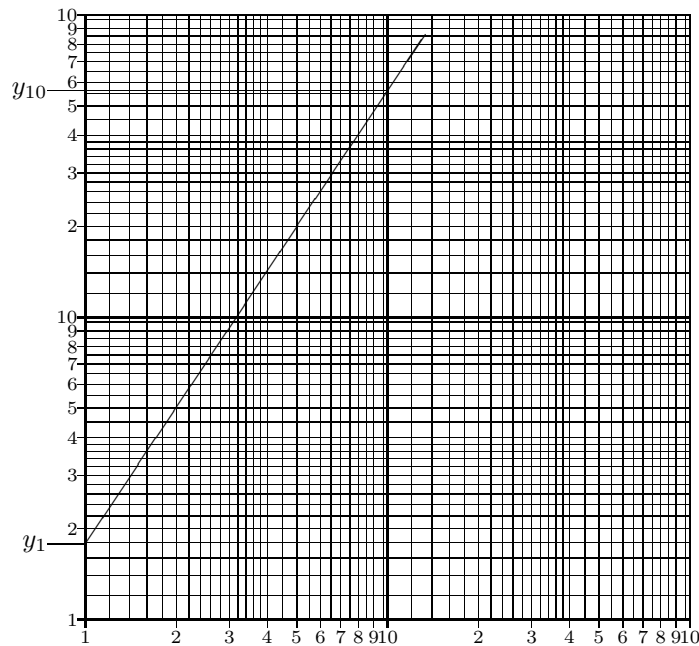


Abb. 7.6: Doppelt-logarithmisches Papier

Verfahren 7.20 (Bestimmen der Parameter einer Potenzfunktion) Ist der physikalische Zusammenhang zwischen den Messwerten (x, y) durch eine Potenzfunktion

$$y = b \cdot x^a$$

gegeben, so kann man die zu ermittelnden Parameter ebenfalls durch Logarithmieren bestimmen:

$$\lg(y) = \lg(b) + a \cdot \lg(x)$$

ist eine Gerade durch

$$(0, \lg(b)) = (\lg(1), \lg(b))$$

mit der Steigung a . Die Messstellen $\lg(x)$ und Messwerte $\lg(y)$ werden in doppelt-logarithmisches Papier eingetragen. Zur Ermittlung der Parameter a und b lesen wir zum Beispiel

- $y_1 = y(1) = b$ und
- $y_{10} = y(10) = b \cdot 10^a$

ab, kennen damit b und berechnen

$$a = \lg\left(\frac{y_{10}}{y_1}\right) = \lg(y_{10}) - \lg(y_1). \quad (7.2)$$

Gehen wir in der Zeichnung von einem Koordinatenursprung $(\lg(1), \lg(1)) = (0, 0)$ in der linken unteren Ecke aus, so lesen wir $y_1 \approx 1.8$ und $y_{10} \approx 56$ ab und erhalten

$$y(x) \approx 1.8 \cdot x^{\lg(56/1.8)} \approx 1.8 \cdot x^{1.49}.$$

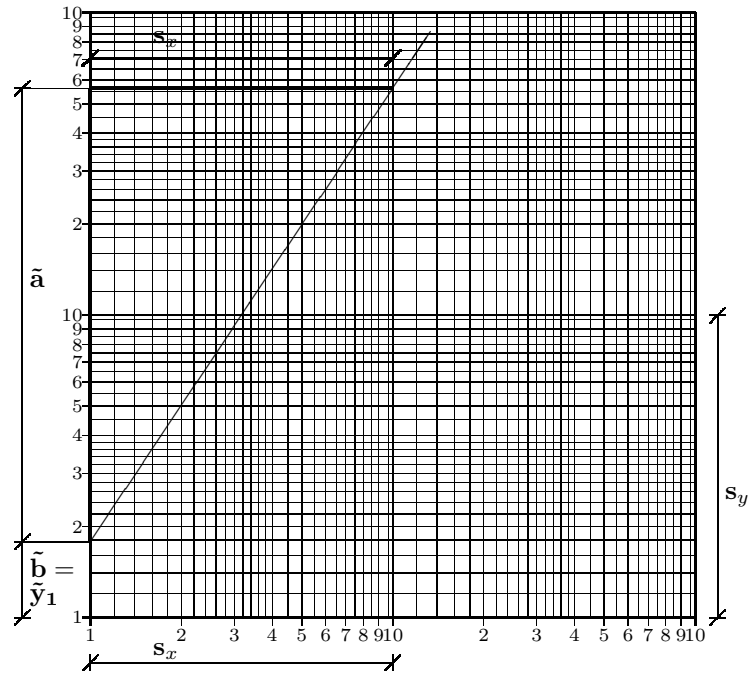


Abb. 7.7: Doppelt-logarithmisches Papier, verzerrt

Verfahren 7.21 (Messmethode) Analog zur Vorgehensweise bei einfach-logarithmischem Papier messen wir

- den verzerrten Ordinatenabschnitt $\tilde{y}_1 = \tilde{b} = \lg(b) \cdot s_y$ und erhalten

$$b = y_1 = 10^{\tilde{b}/s_y},$$

- die vertikale Kathete des Steigungsdreiecks $\tilde{a} = a \cdot s_y$ bei horizontaler Kathete s_x und berechnen die Basis der Exponentialfunktion

$$a = \frac{\tilde{a}}{s_y} \quad \text{oder}$$

- den verzerrten logarithmischen Funktionswert $\tilde{y}_{10} = \lg(y_{10}) \cdot s_y$ und berechnen mit Gleichung (7.2) die Basis der Exponentialfunktion

$$a = \lg(y_{10}) - \lg(y_1) = \frac{\tilde{y}_{10} - \tilde{y}_1}{s_y}.$$

In der Zeichnung sind $s_x = 4$ cm, $s_y = 4$ cm, $\tilde{a} = 6$ cm und $\tilde{b} = 1$ cm. Hieraus folgen $a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ und $b = 10^{1/4} \approx 1.78$ und die gesuchte Funktion lautet näherungsweise

$$y(x) \approx 1.78 \cdot x^{3/2}.$$

§ 8 Differenzialrechnung

8.A Ableitung einer Funktion

In diesem Paragraphen werden wir zeitliche Änderungen einer Messgröße mathematisch fassen und berechnen. Diese zeitlichen Änderungen oder sie beeinflussende Faktoren haben oft allgemein bekannte, anwendungsbezogene Bezeichnungen:

- Die bei einer Bewegung pro Zeiteinheit zurückgelegte Strecke: *Geschwindigkeit*.
- Die Ab- oder Zunahme des Tankinhalts pro Zeiteinheit: *Volumenfluss* (Abnahme: Durchfluss durch das Ausflussrohr pro Zeiteinheit).
- Die in einer Population (Bakterienkultur, Tiergattung) pro Zeiteinheit geborenen beziehungsweise gestorbenen Individuen: *Wachstum* dieser Population.

Im zweiten Beispiel kann der Tankinhalt V als Funktion der Zeit $V(t)$ betrachtet werden. Für ein Zeitintervall Δt vom Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ fragen wir nach der Volumenänderung $\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$.

Diesen Zusammenhang werden wir im folgenden für eine beliebige Funktion $f(x)$ formulieren.

Definition 8.1 (Steigung, Ableitung einer Funktion)

- Die Steigung einer Funktion f an der Stelle x ist näherungsweise gleich $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, also näherungsweise gleich der Steigung der Sekante durch die Punkte $(x|f(x))$ und $(x + \Delta x|f(x + \Delta x))$. Diese Steigung ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Wenn Δx immer kleiner wird, nähern sich die Sekanten immer mehr der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt x an.
- Die Steigung der Funktion f ist die Tangentensteigung, die als Grenzwert der Sekantensteigungen berechnet wird. Diese ist also

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Wir definieren damit die erste Ableitung einer Funktion:

- Ist $f : \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und x ein Punkt im Inneren des Definitionsbereichs \mathbb{D}_f (also kein Randpunkt), so heißt f differenzierbar in x , falls der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

existiert. $f'(x)$ heißt erste Ableitung von f an der Stelle x .

Als weitere Schreibweisen für die Ableitung an einer Stelle x_0 sind gebräuchlich:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = f'(x_0).$$

In der Grenzwertberechnung wird der einfacheren Notation wegen häufig Δx durch h ersetzt:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Bemerkung 8.2 (Änderungsrate) Häufig wird die Änderung einer Messgröße pro Zeiteinheit auf den Wert der Messgröße selbst bezogen, dies ist dann die *Änderungsrate* dieser Messgröße, näherungsweise $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x \cdot f(x)}$:

- Die in einer Population (Bakterienkultur, Tiergattung) pro Zeiteinheit geborenen beziehungsweise gestorbenen Individuen: *Geburtenrate* bzw. *Sterberate* dieser Population.
- Die Anzahl der zerfallenden Atome einer radioaktiven Substanz bezogen auf die Anzahl der vorhandenen Atome: *Zerfallsrate*.

Diesen Begriff werde ich hier nicht weiter untersuchen.

Beispiel 8.3 (Erste Berechnungen von Ableitungen)

(a) $f(x) = a \cdot x + b$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a$$

(b) $f(x) = a \cdot x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2ax$$

Regel 8.4 Sind die Funktionen f und g in einer Umgebung von $x \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$ differenzierbar, so gelten

(a) die **Additionsregel** $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$:

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x); \end{aligned}$$

(b) die **Subtraktionsregel** $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$, die analog nachgewiesen wird:

$$\begin{aligned} (f(x) - g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - g(x+h) - (f(x) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) - g'(x); \end{aligned}$$

(c) und die **Produktregel** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$:

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Hieraus folgen

(d) die Regel für **Skalarmultiplikation einer Funktion** $(a \cdot g(x))' = a \cdot g'(x)$:

Mit der konstanten Funktion $f(x) = a$, also $a' = f'(x) = 0$, erhält man

$$(a \cdot g(x))' = a' \cdot g(x) + a \cdot g'(x) = a \cdot g'(x).$$

Diese Regel kann natürlich auch direkt wie oben nachgewiesen werden.

(e) und die **Quotientenregel** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Wir suchen $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ und erhalten durch Differenzieren von $f(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \cdot g(x)$ nach der Produktregel die Gleichung

$$f'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \cdot g(x) + \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \cdot g'(x),$$

die wir nach $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ umstellen:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

(f) Ist g differenzierbar in einer Umgebung von x und f in einer Umgebung von $g(x)$, so gilt die **Kettenregel** $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$:

$$\begin{aligned} (f(g(x)))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Setzen wir $\tilde{h} := g(x+h) - g(x)$, so folgt aus obiger Gleichung wegen $g(x+h) = g(x) + \tilde{h}$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{h} = 0$

$$(f(g(x)))' = \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + \tilde{h}) - f(g(x))}{\tilde{h}} \cdot \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Aus der Kettenregel folgen

(g) die Regel für die **Skalarmultiplikation des Arguments** $(f(a \cdot x))' = a \cdot f'(a \cdot x)$:
Mit der inneren Funktion $g(x) = a \cdot x$ erhalten wir wegen $g'(x) = a$

$$(f(a \cdot x))' = f'(a \cdot x) \cdot a = a \cdot f'(a \cdot x),$$

(h) und die **Regel für die Umkehrfunktion** $f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$:

Aus $x = f(f^{-1}(x))$ folgt durch Differenzieren nach der Kettenregel

$$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot f^{-1'}(x),$$

woraus wir durch Umstellen nach $f^{-1'}(x)$ die gesuchte Regel erhalten:

$$f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

8.B Ableitungen elementarer Funktionen

Regel 8.5 (Ableitung von Polynomen)

(a) **Monom dritten Grades:** $x^{3'} = 3x^2$:

$$x^{3'} = (x \cdot x^2)' = x' \cdot x^2 + x \cdot 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2$$

(b) **Monom beliebigen Grades:** $\forall (n \in \mathbb{N}) x^{n'} = n \cdot x^{n-1}$ (für alle natürlichen Zahlen ...):
Beweis durch Induktion nach n :

$$\begin{array}{ll} \text{Induktionsanfang: } n = 1: & \text{linke Seite: } (x^1)' = x' = 1; \\ & \text{rechte Seite: } 1 \cdot x^0 = 1. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Induktionsschluss: } (x^n)' &= (x \cdot x^{n-1})' \\ &= x' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' \\ &= x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} && \left(\begin{array}{l} \text{nach Induktions-} \\ \text{voraussetzung} \end{array} \right) \\ &= n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

$$(c) \text{ beliebiges Polynom: } \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' = \sum_{i=1}^n a_i \cdot i \cdot x^{i-1}:$$

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)' = \sum_{i=0}^n (a_i x^i)' = a'_0 + \sum_{i=1}^n (a_i x^i)' = \sum_{i=1}^n a_i i \cdot x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} (i+1) \cdot x^i$$

Regel 8.6 (Ableitungen der Kreisfunktionen)

(a) **Sinusfunktion:** $\sin'(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x)}{h} && \text{(Additionssatz)} \\ &= \sin(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 && \text{(nach 5.8)} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

(b) **Kosinusfunktion:** $\cos'(x) = -\sin(x)$:

Mit Hilfe der Umformungen der trigonometrischen Funktionen und der Ableitung der Sinusfunktion berechnen wir

$$\cos'(x) = \sin' \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\sin(x).$$

Natürlich kann diese Formel auch wie oben mit dem Additionssatz bewiesen werden!

(c) **Tangensfunktion:** $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$:

Mit Hilfe der Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion und der Quotientenregel berechnen wir

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Aus dem dritten Term erhalten wir durch Addition des Zählers den vierten und durch summandenweises Kürzen den vierten. Beide Ergebnisse werden gleichwertig in Abhängigkeit vom weiteren Lösungsweg benutzt.

(d) **Arkustangensfunktion:** $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

Die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion liefert

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Regel 8.7 (Ableitungen der Logarithmus- und Exponentialfunktionen)

(a) **Natürliche Logarithmusfunktion:** $\ln'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
 \ln'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right) = \frac{1}{x} \lim_{z \rightarrow \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z\right) \quad (z = \frac{x}{h}, x = \frac{z}{h}) \\
 &= \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z\right)\right) \quad (\ln \text{ ist stetig}) \\
 &= \frac{1}{x} \ln(e) = \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

(b) **Natürliche Exponentialfunktion:** $e^{x'} = e^x$:

Die Regel für die Umkehrfunktion liefert $(e^x)' = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$.

(c) **Allgemeine Exponentialfunktion:** $\forall (a \in \mathbb{R}_{>0}) a^{x'} = \ln(a) \cdot a^x$:

Für $a > 0$ folgt mit $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ aus der Kettenregel

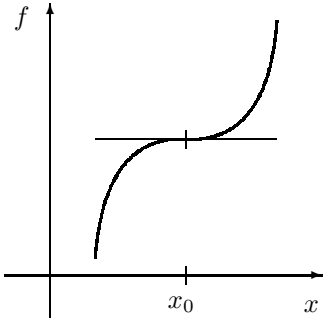
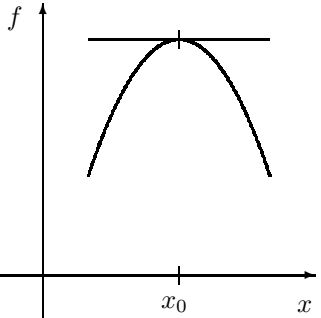
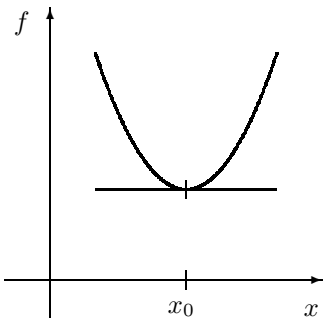
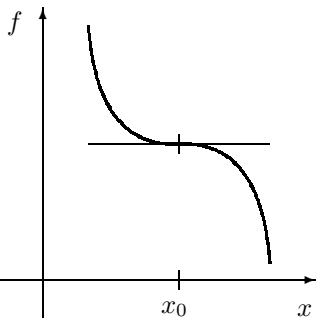
$$(a^x)' = (e^{x \cdot \ln(a)})' = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(a))' = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x .$$

8.C Kurvendiskussion

Regel 8.8 (Ableitungen und Kurvenverlauf)

- (a) Ist die Funktion f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}_f$ differenzierbar mit der Ableitung 0, also $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 kritische Stelle von f und $(x_0|f(x_0))$ kritischer Punkt.
- (b) Welche analytische und geometrische Eigenschaften hat eine Funktion an einem kritischen Punkt? Zur Beantwortung der Frage unterscheiden wir nach den möglichen Fällen für die Ableitungen in der Nähe von x_0 :

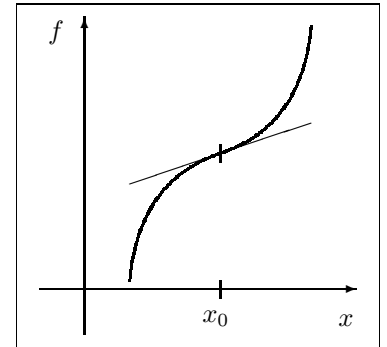
Tab. 8.1: Kurvendiskussion

		$x > x_0$	
		$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$x < x_0$	$f'(x) > 0$	 <p>$(x_0 f(x_0))$ ist Sattelpunkt, f' hat in x_0 ein Minimum, $f''(x_0) = 0$</p>	 <p>x_0 ist Maximalstelle, f' ist fallend, $f'' < 0$</p>
	$f'(x) < 0$	 <p>x_0 ist Minimalstelle, f' ist steigend, $f'' > 0$</p>	 <p>$(x_0 f(x_0))$ ist Sattelpunkt, f' hat in x_0 ein Maximum, $f''(x_0) = 0$</p>

- (c) Welche analytische und geometrische Bedeutung hat ein Punkt, für den $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ gelten?

Mit obiger Überlegung folgt, dass f' dort ein Minimum oder ein Maximum hat. Die Tangente durchstößt an dieser Stelle also den Graphen. Der Punkt heißt Wendepunkt, die Tangente in einem Wendepunkt heißt Wendetangente.

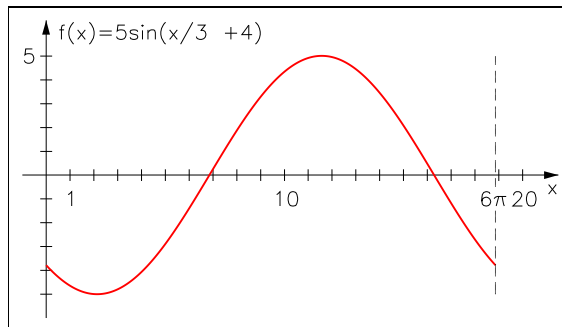
Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente. In einem Sattelpunkt $(x_0|f(x_0))$ gilt also $f''(x_0) = f'(x_0) = 0$.



Beispiel 8.9 (Kurvendiskussion) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = 5 \cdot \sin\left(\frac{x}{3} + 4\right)$ auf dem Intervall $[0, 6\pi]$.

LÖSUNG: Wir notieren zunächst die Ableitungen

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \cdot \sin\left(\frac{x}{3} + 4\right), & \mathbb{D}_f &= [0, 6\pi] \\ f'(x) &= \frac{5}{3} \cos\left(\frac{x}{3} + 4\right), & \mathbb{D}_{f'} &= [0, 6\pi] \\ f''(x) &= -\frac{5}{9} \sin\left(\frac{x}{3} + 4\right), & \mathbb{D}_{f''} &= [0, 6\pi] \\ f'''(x) &= -\frac{5}{27} \cos\left(\frac{x}{3} + 4\right), & \mathbb{D}_{f'''} &= [0, 6\pi] \end{aligned}$$



(a) **Nullstellen:**

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) = 5 \sin\left(\frac{x}{3} + 4\right) \\ \iff \frac{x}{3} + 4 &= k \cdot \pi & \text{mit } k \in \mathbb{Z} \\ \iff x &= 3(k \cdot \pi - 4) = 3k\pi - 12 & \text{mit } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Im Definitionsbereich liegen $x_{N_1} = 6\pi - 12$ und $x_{N_2} = 9\pi - 12$.

(b) **Extremstellen:**

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) = \frac{5}{3} \cos\left(\frac{x}{3} + 4\right) \\ \iff \frac{x}{3} + 4 &= \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi & \text{mit } k \in \mathbb{Z} \\ \iff x &= 3\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi - 4\right) & \text{mit } k \in \mathbb{Z} \\ \iff x &= \frac{3 + 6k}{2}\pi - 12 & \text{mit } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Im Definitionsbereich liegen $x_{K_1} = \frac{9}{2}\pi - 12$ und $x_{K_2} = \frac{15}{2}\pi - 12$. Diese Stellen setzen wir in die zweite Ableitung ein:

$$\begin{aligned} f''(x_{K_1}) &= -\frac{5}{9} \sin\left(\frac{\frac{9}{2}\pi - 12}{3} + 4\right) = -\frac{5}{9} \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{5}{9} > 0 \\ f''(x_{K_2}) &= -\frac{5}{9} \sin\left(\frac{\frac{15}{2}\pi - 12}{3} + 4\right) = -\frac{5}{9} \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = -\frac{5}{9} < 0 \end{aligned}$$

Damit ist x_{K_1} eine Minimalstelle und x_{K_2} eine Maximalstelle mit den Extremwerten

$$\begin{aligned} f(x_{K_1}) &= 5 \sin\left(\frac{\frac{9}{2}\pi - 12}{3} + 4\right) = 5 \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -5, \\ f(x_{K_2}) &= 5 \sin\left(\frac{\frac{15}{2}\pi - 12}{3} + 4\right) = 5 \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 5. \end{aligned}$$

Weitere lokale Extremstellen befinden sich an den Randpunkten des Definitionsbereichs:

- $(0; f(0)) = (0; 5 \sin(4)) \approx (0; -3.784)$ ist ein lokales Maximum und
- $(6\pi; f(6\pi)) = (6\pi; 5 \sin(2\pi + 4)) = (6\pi; 5 \sin(4)) \approx (18.850; -3.784)$ ein lokales Minimum.

(c) **Wendestellen:**

$$0 = f''(x) = -\frac{5}{9} \sin\left(\frac{x}{3} + 4\right) \iff x = 3(k \cdot \pi - 4) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Dies sind genau die Nullstellen. Wir setzen sie in die dritte Ableitung ein:

$$\begin{aligned} f'''(3(k \cdot \pi - 4)) &= -\frac{5}{27} \cos\left(\frac{3(k \cdot \pi - 4)}{3} + 4\right) = -\frac{5}{27} \cos(k \cdot \pi - 4 + 4) \\ &= -\frac{5}{27} \cos(k \cdot \pi) = \mp \frac{5}{27} \neq 0. \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind damit auch Wendestellen. Die Steigungen der Wendetangenten sind

$$\begin{aligned} f'(3(k \cdot \pi - 4)) &= \frac{5}{3} \cos\left(\frac{3(k \cdot \pi - 4)}{3} + 4\right) = \frac{5}{3} \cos(k \cdot \pi - 4 + 4) \\ &= \frac{5}{3} \cos(k \cdot \pi) = \pm \frac{5}{3} \quad . \end{aligned}$$

Beispiel 8.10 In welchem Punkt hat der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 2$ eine Tangente mit dem Steigungswinkel 45° ?

LÖSUNG: Gesucht wird eine Stelle $x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \tan(45^\circ) = 1$.

$$1 = f'(x) = 3x^2 - 3 \iff x^2 = \frac{4}{3}$$

Damit ist $x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ und $x_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Die zugehörigen Funktionswerte werden berechnet zu

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{8}{27} \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 = 2 - \frac{10}{9}\sqrt{3} \\ f(x_2) &= -\frac{8}{27} \cdot 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2 = 2 + \frac{10}{9}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Die gesuchten Punkte sind $P_1\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \mid 2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}\right)$ und $P_2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3} \mid 2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}\right)$.

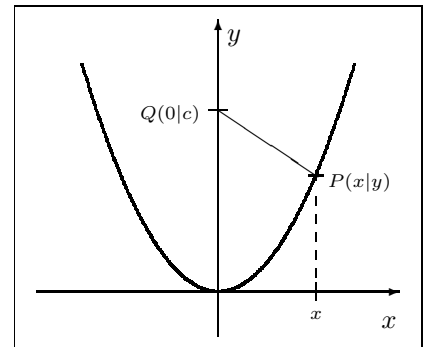
Beispiel 8.11 Welcher Punkt der Parabel $y = a \cdot x^2$ mit $a > 0$ liegt am nächsten zu dem gegebenen Punkt $Q(0|c)$ ($c > 0$) auf der y-Achse?

LÖSUNG: Wir berechnen den Abstand eines Punkts $P(x|y)$ der Parabel zum Punkt $Q(0|c)$ und differenzieren diesen Ausdruck zur Berechnung des kleinsten Abstands:

Der Abstand des Punkts $P(x|y)$ von Q wird berechnet durch

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - c)^2} \quad .$$

Hierin ersetzen wir y für Punkte der Parabel durch ax^2 und erhalten für den Abstand, der jetzt nur von x abhängt



$$d(x) = \sqrt{x^2 + (ax^2 - c)^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 - 2acx^2 + c^2} = \sqrt{a^2x^4 + (1 - 2ac)x^2 + c^2}$$

mit dem Definitionsbereich $D_d = \mathbb{R}$. Zur Berechnung der Lage des nächstgelegenen Punkts P differenzieren wir d :

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{4a^2x^3 + 2x(1 - 2ac)}{2 \cdot \sqrt{a^2x^4 + (1 - 2ac)x^2 + c^2}} = \frac{x(1 - 2ac + 2a^2x^2)}{d(x)} \\ d''(x) &= \frac{(1 - 2ac + 6a^2x^2) \cdot d(x) - x(1 - 2ac + 2a^2x^2) \cdot d'(x)}{(d(x))^2} \quad . \end{aligned}$$

An einer Minimalstelle ist die erste Ableitung Null, es gilt also

$$d'(x_0) = 0 \iff x_0 = 0 \vee x_0^2 = \frac{2ac - 1}{2a^2} \iff x_0 = 0 \vee x_0 = \pm \sqrt{\frac{2ac - 1}{2a^2}} \quad \text{für} \quad ac > \frac{1}{2} \quad .$$

$x_0 = 0$ sieht in der Skizze nach einer lokalen Maximalstelle aus. Dies überprüfen wir formal durch Einsetzen in die zweite Ableitung:

$$d''(0) = \frac{(1 - 2ac) \cdot d(0)}{(d(0))^2} = \frac{1 - 2ac}{c} < 0 \iff \frac{1}{2} < ac \quad .$$

Damit ist $x_0 = 0$ eine lokale Maximalstelle, falls $ac > \frac{1}{2}$ ist; $x_0 = 0$ ist eine lokale Minimalstelle, falls $ac < \frac{1}{2}$ ist.

Die Stelle $x_0 = \pm \sqrt{\frac{2ac-1}{2a^2}}$ untersuchen wir für $ac > \frac{1}{2}$ ebenso und berechnen

$$d''(x_0) = \frac{(1 - 2ac + 6a^2 \frac{2ac-1}{2a^2}) \cdot d(x_0)}{(d(x_0))^2} = \frac{1 - 2ac + 3(2ac - 1)}{d(x_0)} = \frac{2(2ac - 1)}{d(x_0)}.$$

Da der Abstand $d(x_0)$ wegen $c > 0$ positiv ist, folgt hieraus für $ac > \frac{1}{2}$ sofort $d''(x_0) > 0$. In diesem Fall sind $x_0 = \pm \sqrt{\frac{2ac-1}{2a^2}}$ lokale Minimalstellen und $x_0 = 0$ eine lokale Maximalstelle.

Wir beschließen diesen Paragraphen mit einer weiteren Kurvendiskussion:

Beispiel 8.12 Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2$.

LÖSUNG: Wir notieren zunächst die Ableitungen

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 = x^2(3x^2 - 16x + 24), & \mathbb{D}_f &= \mathbb{R} \\ f'(x) &= 12x^3 - 48x^2 + 48x = 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x-2)^2, & \mathbb{D}_{f'} &= \mathbb{R} \\ f''(x) &= 36x^2 - 96x + 48 = 12(3x^2 - 8x + 4), & \mathbb{D}_{f''} &= \mathbb{R} \\ f'''(x) &= 72x - 96 = 12(6x - 8), & \mathbb{D}_{f'''} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) **Nullstellen:**

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ \iff 0 &= x^2 \vee 0 = 3x^2 - 16x + 24 \\ \iff x &= 0 \vee x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{6} \end{aligned}$$

Da der Radikand des letzten Ausdrucks negativ ist, existiert die Wurzel nicht. Es gibt also nur die (doppelte) Nullstelle $x_N = 0$.

(b) **Extremstellen:**

$$\begin{aligned} 0 = f'(x) &\iff 0 = x \vee 0 = (x-2)^2 \\ &\iff x = 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Damit hat f die kritische Stelle $x_{K_1} = 0$ und die doppelte kritische Stelle $x_{K_2} = 2$. Eingesetzt in die zweite Ableitung erhalten wir $f''(x_{K_1}) = 48$ und $f''(x_{K_2}) = 0$, so dass wegen $f(0) = 0$ der Punkt $(0|0)$ ein Minimum und mit $f'''(2) = 48 \neq 0$ der Punkt $(2|f(2)) = (2|16)$ ein Sattelpunkt ist.

(c) **Wendestellen:**

$$\begin{aligned} 0 = f''(x) &\iff 0 = 3x^2 - 8x + 4 \\ &\iff x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \frac{4 \pm 2}{3} \end{aligned}$$

Für Wendestellen kommen damit $x_{W_1} = 2$ und $x_{W_2} = \frac{2}{3}$ in Frage. $(2|16)$ steht bereits als Sattelpunkt fest. Für die zweite Stelle berechnen wir

$$f'''(x_{W_2}) = 12(4 - 8) = -48.$$

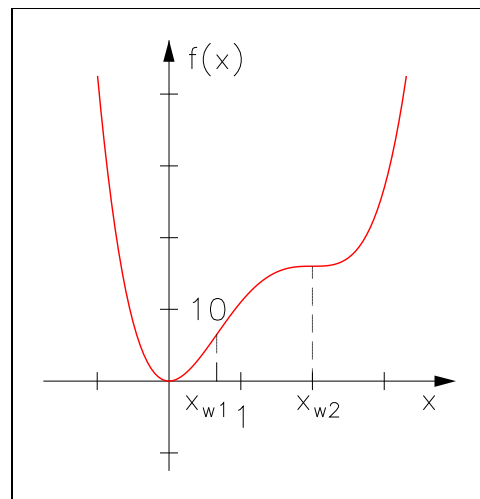


Abb. 8.1: Parabel vierten Grades

Damit steht $x_{W_2} = \frac{2}{3}$ als Wendestelle fest. Wir berechnen noch den Funktionswert und die Steigung der Wendetangente:

$$\begin{aligned} f(x_{W_2}) &= f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \left(3 \cdot \frac{4}{9} - 16 \cdot \frac{2}{3} + 24 \right) = \frac{4}{9} \left(-\frac{28}{3} + \frac{72}{3} \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{44}{3} = \frac{176}{27}, \\ f'(x_{W_2}) &= f'\left(\frac{2}{3}\right) = 12 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 \right) = 8 \left(-\frac{20}{9} + \frac{36}{9} \right) = \frac{16}{9}. \quad \diamond \end{aligned}$$

8.D Stammfunktionen

Wir haben untersucht, wie man die Ableitung einer Funktion bestimmt. Bei vielen Aufgabenstellungen muss man jedoch eine Funktion aus ihrer bekannten Ableitung zurückgewinnen. Ein Physiker zum Beispiel kennt die Geschwindigkeit eines Partikels und möchte gerne wissen zu welcher Zeit es an einer bestimmten Position ist. Ein Ingenieur, der die Änderungsrate mit der Wasser aus einem Behälter fließt kennt, möchte wissen, wie groß die auslaufende Wassermenge über einem bestimmten Zeitabschnitt ist. Ein Biologe, der die Rate mit der die Bakterienkolonie abnimmt kennt, möchte wissen wie sich die Populationsgröße in Zukunft verändert. Allgemeiner ausgedrückt, wollen wir eine Funktion F aus ihrer Ableitung f bestimmen. Existiert solch eine Funktion F , dann wird sie Stammfunktion der Funktion f genannt. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass Stammfunktionen die Brücke zwischen zwei Hauptgegenständen der Analysis sind: nämlich die Verbindung zwischen Ableitung und (un)bestimmten Integralen.

Definition 8.13 (Stammfunktion) Eine Funktion F wird Stammfunktion der Funktion f in dem Intervall I genannt, wenn für alle x in I gilt $F'(x) = f(x)$.

Der Prozess, eine Funktion $F(x)$ aus ihrer Ableitung $f(x)$ zu gewinnen, heißt *Integration*. Wir verwenden Großbuchstaben, um die Stammfunktion F einer Funktion f zu bezeichnen.

Beispiel 8.14 Die Funktion $f(x) = x^2$ hat die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, weil $F'(x) = x^2 = f(x)$. Für die Funktion $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ gilt ebenfalls $G'(x) = x^2$. Somit sind sowohl F als auch G Stammfunktionen von f . Wir können somit sagen, dass jede Funktion der Form $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ eine Stammfunktion von f ist. Bei C handelt es sich um eine Konstante.

Allgemein ausgedrückt, haben wir das Resultat:

Satz 8.15 Ist F eine Stammfunktion von f in einem Intervall I , so ist die allgemeine Stammfunktion von f in I

$$F(x) + C$$

mit einer beliebigen Konstante C .

Somit ist die allgemeinste Stammfunktion von f in I eine *Schar* von Funktionen $F(x) + C$, deren Graphen vertikale Verschiebungen voneinander sind. Wir können eine bestimmte Stammfunktion aus dieser Schar wählen, in dem wir C einen speziellen Wert zuweisen.

Beispiel 8.16 Bestimmen Sie die allgemeine Stammfunktion der folgenden Funktionen.

- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = x^n, \quad n \neq -1$

LÖSUNG:

- Ist $F(x) = -\cos(x)$, dann ist $F'(x) = \sin(x)$. Die Stammfunktion von $\sin(x)$ ist $-\cos(x)$. Wegen Satz 8.15 ist die allgemeine Stammfunktion $G(x) = -\cos(x) + C$.

b) Die Ableitung des natürlichen Logarithmus

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

Die Stammfunktion für $\frac{1}{x}$ im Intervall $(0, \infty)$ ist somit $\ln(x) + C$. Erweitern wir den Definitionsbereich, so gilt für $x \neq 0$ das

$$\frac{d}{dx}(\ln(|x|)) = \frac{1}{x}.$$

Die allgemeine Stammfunktion von f ist somit

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + C & x > 0 \\ \ln(-x) + C & x < 0 \end{cases}$$

c) Wir benutzen die Potenzregel, um die Stammfunktion von x^n zu bestimmen. Wir erinnern uns, dass für $n \neq -1$ gilt,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Somit ist für $f(x) = x^n$ die allgemeine Stammfunktion

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Dies gilt für $n \geq 0$. Ist n negativ und $n \neq -1$ gilt diese Stammfunktion auf jedem Intervall, das nicht 0 enthält.

Beispiel 8.17 Die folgenden Regeln lassen sich leicht überprüfen, indem man die Ableitung der allgemeinen Stammfunktion bildet.

	Funktion	Stammfunktion		Funktion	Stammfunktion
1.	$cf(x)$	$cF(x)$	7.	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
2.	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x)$	8.	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
3.	$x^n \quad n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	9.	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
4.	$\frac{1}{x}$	$\ln x $	10.	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}(x)$
5.	e^x	e^x	11.	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$
6.	$\cos(x)$	$\sin(x)$			

Beispiel 8.18 Bestimmen Sie alle Funktionen g für die gilt

$$g'(x) = 4 \sin(x) + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

LÖSUNG: Zunächst vereinfachen wir die Funktion:

$$g'(x) = 4 \sin(x) + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \sin(x) + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Wir suchen die Stammfunktion von

$$g'(x) = 4 \sin(x) + 2x^4 - x^{-1/2}.$$

Zusammen mit der Tabelle 8.17 und dem Satz 8.15 erhalten wir

$$\begin{aligned} g(x) &= 4(-\cos(x)) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= -4 \cos(x) + \frac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

Beispiel 8.19 Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = e^x + 20(1+x^2)^{-1}$, die die Nebenbedingung $F(0) = -2$ erfüllt.

LÖSUNG: Die allgemeine Stammfunktion von $f(x) = e^x + 20(1+x^2)^{-1}$ lautet

$$F(x) = e^x + 20 \arctan(x) + C.$$

Nun ermitteln wir den Wert der Konstanten C und benutzen $F(0) = -2$.

$$\begin{aligned} F(0) &= e^0 + 20 \arctan(0) + C = -2 \\ 1 + 20 \cdot 0 + C &= -2 \\ C &= -3 \end{aligned}$$

Die Stammfunktion ist somit

$$F(x) = e^x + 20 \arctan(x) - 3$$

Beispiel 8.20 Bestimmen Sie die Funktion f . Für die zweite Ableitung von f gilt $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$. Außerdem sei $f(0) = 4$ und $f(1) = 1$.

LÖSUNG: Die allgemeine Stammfunktion von $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ ist

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C.$$

Bestimmen wir von dieser Funktion die Stammfunktion erhalten wir

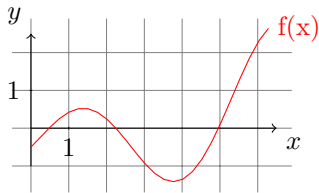
$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D.$$

Um die Konstanten C und D zu bestimmen, betrachten wir die Nebenbedingungen $f(0) = 4$ und $f(1) = 1$. Wir erhalten mit der ersten Bedingung, dass $D = 4$ ist. Für $f(1) = 1$ und $D = 4$ erhalten wir $f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$. Somit ist $C = -3$. Die gesuchte Funktion ist

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Wenn wir den Graphen der Funktion f kennen, so können wir auch die Stammfunktion F bestimmen. Im folgenden Beispiel bestimmen wir den Graphen der Stammfunktion F , obwohl wir keine Funktionsgleichung angegeben haben.

Beispiel 8.21 Der Graph der Funktion f ist gegeben. Erstellen Sie eine grobe Zeichnung der Stammfunktion, wobei die Nebenbedingung $F(0) = 3$ gilt.



LÖSUNG:

Die Ableitungsfunktion $f(x)$ ist in den Bereichen $(0, 0.5)$ und $(2.2, 5)$ negativ, somit ist die Stammfunktion in diesen Bereichen fallend.

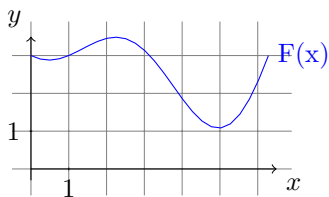
In den Bereichen $(0.5, 2.2)$ und $(5, 6.3)$ ist $f(x)$ positiv; deshalb ist die Stammfunktion hier wachsend.

An der Stelle $x = 0.5$ ändert sich das Vorzeichen von $f(x)$ von negativ zu positiv; somit hat die Stammfunktion an dieser Stelle ein lokales Minimum. Auch an der Stelle $x = 5$ liegt ein lokales Minimum vor, da hier $f(x)$ von negativ zu positiv wechselt.

An der Stelle $x = 2.2$ wechselt das Vorzeichen von positiv zu negativ; hier hat die Stammfunktion ein lokales Maximum.

An den Stellen $x = 1.4$ und $x = 3.8$ liegen die Extremstellen der Ableitungsfunktion $f(x)$; diese kennzeichnen die Wendepunkte der Stammfunktion.

Mit diesen Informationen können wir die Stammfunktion zeichnen.



Es gibt ein spezielles Symbol, dass für die Menge der Stammfunktionen einer Funktion f verwendet wird.

Definition 8.22 Die Menge der Stammfunktionen von f nennt man *unbestimmtes Integral* von f bezüglich x . Man schreibt dies als

$$\int f(x)dx.$$

Das Symbol \int ist das Integralzeichen. Die Funktion f nennt man *Integrand* und x ist die *Integrationsvariable*. Mit dem Differential dx gibt man an, welche die Integrationsvariable ist.

Beispiel 8.23 Wir wenden diese Schreibweise auf die Beispiele 8.14 und 8.16 an. Wir erhalten:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int (2x + \cos(x)) dx = x^2 + \sin(x) + C$$

Häufig können wir die Stammfunktion nicht sofort erkennen. Es ist dann notwendig den Integranden in eine leichter zu integrierende Form zu bringen. Häufig hilft hier das Ausmultiplizieren, Anwenden von Potenzregeln, Anwenden von trigonometrischen Gesetzen u.s.w. Außerdem können wir die Faktorregel (1.), Summenregel- und Differenzenregel (2.) für Stammfunktionen 8.17 anwenden.

§ 9 Analytische Geometrie der Ebene

In diesem Kapitel betrachten wir die geometrischen Objekte Gerade, Kreis und Parabel mit dem Ziel, diese Objekte in ihrer Lage und Beziehung zueinander zu beschreiben. Diese Beschreibung wird natürlich nicht verbaler Art sondern mathematischer Natur sein. Als Grundlage hierfür dienen Koordinatensysteme. Wir betrachten unterschiedliche Beschreibungsmöglichkeiten, indem wir verschiedene Koordinatenarten wählen oder das Koordinatensystem unterschiedlich positionieren.

9.A Koordinatensystem

Definition 9.1 Die Lage eines Punkts P in der reellen Ebene \mathbb{R}^2 , s. Abb. 9.1, wird durch die Angaben von Koordinaten (Achsenabschnitten) x_0 und y_0 beschrieben: $P(x_0; y_0)$ Das dieser Beschreibung zugrunde liegende **kartesische Koordinatensystem** hat folgende Eigenschaften:

- Die Achsen stehen senkrecht aufeinander.
- Die Achsen schneiden sich im Ursprung O .
- Beide Achsen haben eine feste Längeneinteilung, die jedoch auf jeder der beiden Achsen verschieden sein kann.

Die x -Koordinate (x -Achsenabschnitt) heißt Abszisse, die y -Koordinate (y -Achsenabschnitt) heißt Ordinate.

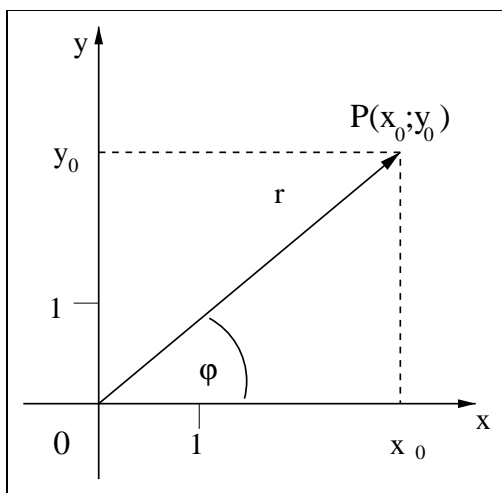


Abb. 9.1: Koordinatensystem

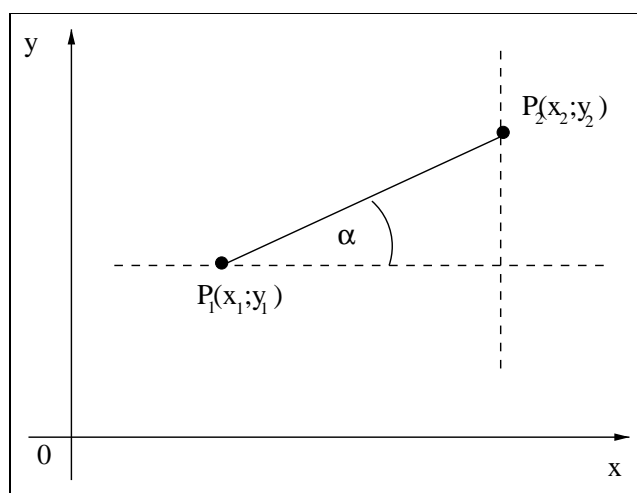


Abb. 9.2: Abstand Punkte

Bemerkung 9.2 Der **Abstand** der beiden Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ wird nach dem Satz des Pythagoras berechnet durch (vgl. Abb. 9.2):

$$d(P_1, P_2) = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Bemerkung 9.3 Die **Steigung** m und der **Steigungswinkel** α der Geraden P_1P_2 durch die Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ werden berechnet durch

$$m = \tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \in (-90^\circ, 90^\circ).$$

Definition 9.4 (Polarkoordinaten) Die Polarkoordinaten eines Punkts P der Ebene sind

- der Abstand $r \in \mathbb{R}_{>0}$ des Punkts P vom Ursprung und
- der Argumentwinkel $\varphi \in [0; 2\pi]$ des Punkts P , gemessen zwischen der positiven x -Achse und der Halbgeraden vom Ursprung O zum Punkt P in mathematisch positivem Umlaufsinn.

Regel 9.5 [Umrechnungen]

- Sind die Polarkoordinaten r und φ eines Punkts P bekannt, so berechnen

$$x = r \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y = r \sin(\varphi)$$

seine kartesischen Koordinaten.

- Umgekehrt können aus den kartesischen Koordinaten auch die Polarkoordinaten berechnet werden:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}.$$

Der Winkel φ wird dann je nach Lage des Punkts in den einzelnen Quadranten durch die Argumentfunktion

$$\varphi = \arg(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \arctan(y/x) & \text{für } x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \wedge y > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{für } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } x = 0 \wedge y < 0 \\ \arctan(y/x) + 2\pi & \text{für } x > 0 \wedge y < 0 \end{array} \right\}.$$

bestimmt werden. Sie hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_{\arg} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Bemerkung 9.6 (Koordinatentransformation bei Parallelverschiebung der Achsen) Der Punkt P wird in den beiden Koordinatensystem unterschiedliche beschrieben: $P(x; y) = P(\bar{x}; \bar{y})$. Die Umrechnung der unterschiedlichen Koordinaten unterliegt den Formeln (vgl. Abb. 9.3)

$$x = \bar{x} + a \quad \text{und} \quad y = \bar{y} + b$$

oder nach \bar{x} und \bar{y} umgestellt

$$\bar{x} = x - a \quad \text{und} \quad \bar{y} = y - b.$$

Beispiel 9.7 Wir suchen die Gleichung der nach oben geöffneten und mit dem Faktor 5 gestreckten Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(4; 3)$.

LÖSUNG: Zur Berechnung betrachten wir ein weiteres Koordinatensystem, das um 4 nach rechts und 3 nach oben verschoben ist. In diesem Koordinatensystem lautet die Gleichung der gesuchten Parabel $\bar{y} = 5\bar{x}^2$. Mit $a = 4$ und $b = 3$ erhalten wir nach den obigen Umrechnungsformeln

$$\begin{aligned} \bar{y} = 5\bar{x}^2 &\iff y - 3 = 5(x - 4)^2 &\iff y - 3 = 5x^2 - 40x + 80 \\ &\iff y = 5x^2 - 40x + 83 \end{aligned}$$

9.B Geraden in der Ebene

Bezeichnungen 9.8 (Formen der Gleichung ein Geraden in der Ebene) Mit den Bezeichnungen gemäß Abb. 9.4

- $P(x; y)$: beliebiger Punkt
- α : Steigungswinkel, $m = \tan(\alpha)$: Steigung

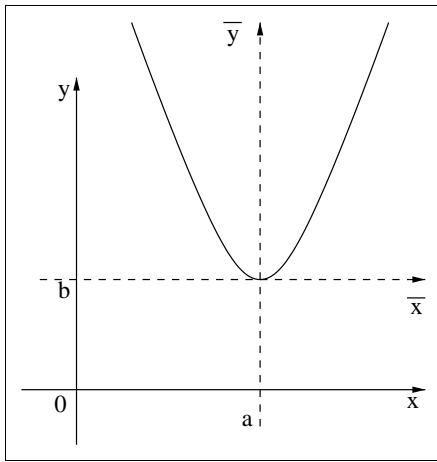


Abb. 9.3: Koordinatentransformation

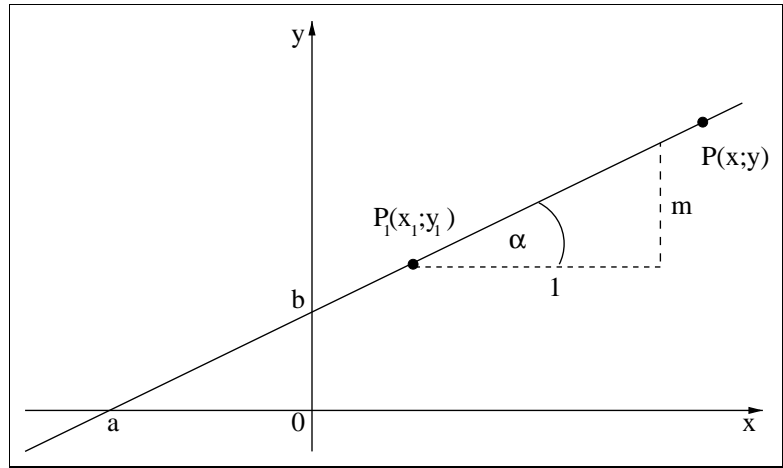


Abb. 9.4: Geradengleichung

- a, b : Abszissen- und Ordinatenabstand, also die Achsenabschnitte
- $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ vorgegebene Punkte

stellen wir die verschiedenen Formen der Geradengleichung in einer Tabelle zusammen: Die

Hauptform ist nur möglich, wenn die Gerade nicht parallel zur y -Achse ist. Dies gilt ebenfalls für die Punktsteigungsform und die Zwei-Punkte-Form. Die Achsenabschnittsform kann

nur genutzt werden, wenn die Gerade den Ursprung nicht enthält und nicht parallel zu einer Achse liegt.

Name	Gleichung
Hauptform	$y = mx + b$
Achsenabschnittsform	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
Allgemeine Form	$Ax + By + C = 0$
Punktsteigungsform	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$
Zwei-Punkte-Form	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Bemerkung 9.9 (Umrechnungen zwischen den Formen)

- (a) Aus der Hauptform erhält man die allgemeine Form durch direktes Umstellen:

$$y - mx - b = 0; \quad (A = -m, \quad B = 1; \quad C = -b).$$

- (b) Aus der allgemeinen Form erhält man die Achsenabschnittsform durch Umstellen und Division durch $-ABC$. Damit ist klar, dass weder A noch B noch C null sein dürfen.

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1; \quad \left(a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}; \quad m = -\frac{A}{B} \right).$$

- (c) Aus der Achsenabschnittsform erhält die Hauptform durch

$$y = -\frac{b}{a}x + b; \quad \left(m = -\frac{b}{a} \right).$$

Analog kann man aus der Punktsteigungsform und der Zwei-Punkte-Form die anderen Formen erhalten.

Ist in der Hauptform B gleich null, so erhält man die Gleichung $x = -\frac{C}{A}$, die eine Parallele zur y -Achse beschreibt.

Beispiel 9.10 Gegeben ist eine Gerade durch die Punkte $P_1(2; 3)$ und $P_2(4; -5)$. Bestimmen Sie die Hauptform, den Steigungswinkel und die Achsenabschnitte.

LÖSUNG:

$$\text{Zwei-Punkte-Form: } \frac{y-3}{x-2} = \frac{-5-3}{4-2}$$

$$\text{Punktsteigungsform: } \frac{y-3}{x-2} = -4$$

$$\text{Hauptform: } y-3 = -4(x-2) \Rightarrow y = -4x + 11$$

$$\text{Steigung: } m = -4$$

$$\text{Steigungswinkel: } \alpha = \arctan(-4) \approx -1.326 \approx -76.0^\circ$$

$$\text{Achsenabschnittsform: } \frac{x}{\frac{11}{4}} + \frac{y}{11} = 1$$

$$\text{Achsenabschnitte: } a = \frac{11}{4}; \quad b = 11$$

Verfahren 9.11 (Schnittpunkt zweier Geraden) Gegeben sind die beiden Geraden (vgl. Abb. 9.5)

$$g_1 : y = m_1x + b_1; \quad g_2 : y = m_2x + b_2$$

Der Schnittpunkt $\{S\} = g_1 \cap g_2$ wird durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \{S\} = g_1 \cap g_2 : \quad & \begin{array}{l} y_s = m_1x_s + b_1 \\ y_s = m_2x_s + b_2 \\ \hline 0 = (m_1 - m_2)x_s + (b_1 - b_2) \end{array} \end{aligned}$$

Für $m_1 \neq m_2$ wird aus dieser Gleichung x_s ausgerechnet und in eine der beiden Geradengleichungen eingesetzt:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_s &= m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_1 = \frac{m_1 b_2 - m_1 b_1 + m_1 b_1 - m_2 b_1}{m_1 - m_2} = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

Für $m_1 = m_2$ sind die beiden Geraden parallel. Sie können verschieden sein, dann gibt es keinen Schnittpunkt, oder sie können identisch sein, dann ist jeder Punkt der Geraden ein Schnittpunkt.

Diese Gleichung ist natürlich symmetrisch in den Parametern der beiden Geraden.

Verfahren 9.12 (Schnittwinkel zwischen zwei Geraden) Mit Hilfe der Additionssätze für Sinus und Kosinus berechnen wir

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)} \\ &= \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{1 + \tan(\alpha_1)\tan(\alpha_2)} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \\ \alpha &= \arctan\left(\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|\right) \end{aligned}$$

$$g_1 \perp g_2 \iff \tan \alpha = \infty \iff 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \iff m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Beispiel 9.13 Gesucht sind Schnittpunkt und -winkel der beiden Geraden

$$g_1 : y = -4x + 11 \quad \text{und} \quad g_2 : y = 3x + 5 :$$

LÖSUNG:

Schnittpunkt: (nach 9.11)

$$x_s = \frac{5 - 11}{-4 - 3} = \frac{6}{7} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{-20 - 33}{-7} = +\frac{53}{7}$$

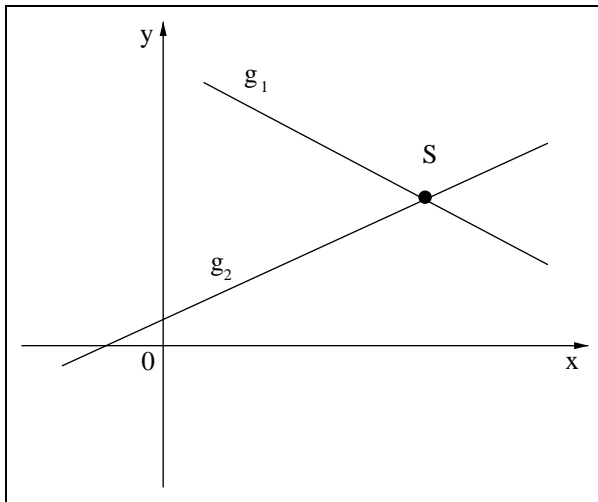


Abb. 9.5: Schnittpunkt

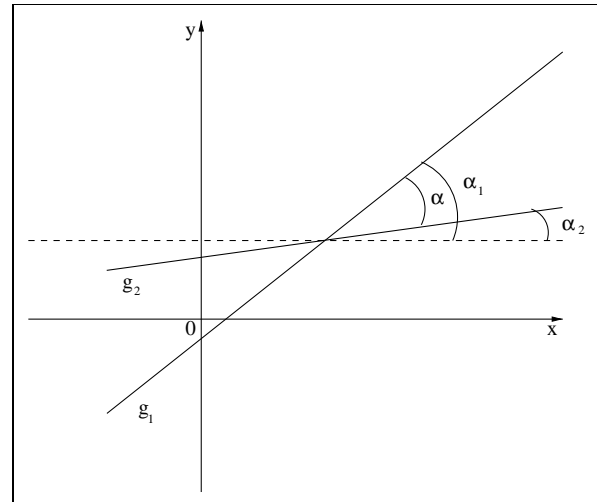


Abb. 9.6: Schnittwinkel

Schnittwinkel: (nach 9.12)

$$\alpha = \arctan \left(\left| \frac{3+4}{1-12} \right| \right) = \arctan \left(\frac{7}{11} \right) \approx 0.567 \approx 32.5^\circ$$

9.C Der Kreis

Definition 9.14 (Kreisgleichung)

$K(M, r)$ bezeichnet einen Kreis um den Mittelpunkt $M(x_0; y_0)$ mit Radius r . Nach dem Satz des Pythagoras lautet die **Mittelpunktsgleichung**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Bemerkung 9.15 (Allgemeine Gleichung 2. Grades)

Die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

beschreibt eine Kurve zweiten Grades in der Ebene. Wie dürfen die Parameter A, \dots, F gewählt werden, wenn diese Kurve ein Kreis sein soll?

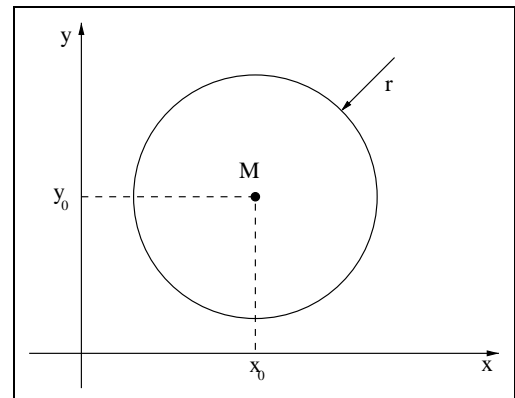


Abb. 9.7: Kreis

Zur Beantwortung rechnen wir die Klammern der Kreisgleichung um:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (-2x_0)x + (-2y_0)y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ein Vergleich der letzten Gleichung mit obiger allgemeinen Gleichung liefert zunächst die Bedingung $A = B = 1$. Da die Gleichung der Kurve 2. Grades aber durch A geteilt werden kann, bleiben die Bedingungen

(a) $A = B; A \neq 0$

(b) $C = 0$

(c) $\frac{D}{A} = -2x_0$ und $\frac{E}{A} = -2y_0$. Hieraus folgen $x_0 = -\frac{D}{2A}$ und $y_0 = -\frac{E}{2A}$.

(d) $\frac{F}{A} = x_0^2 + y_0^2 - r^2$. Dies wird nach r aufgelöst

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - \frac{F}{A}} = \sqrt{\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}} = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2|A|}$$

und wir erhalten die Bedingung

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0.$$

Beispiel 9.16

- (a) Wie lautet die Gleichung des Kreises durch den Punkt $P(3;4)$ um $M(1,-1)$?

Radius: $\overline{MP} = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{29}$

Kreisgleichung: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 29$

Probe: $2^2 + 5^2 = 29$

- (b) Liegt der Punkt $P(3;6)$ innerhalb des Kreises $K((2;2),3)$?

Wir setzen den Punkt in die linke Seite der Kreisgleichung ein und vergleichen das Ergebnis mit dem Radius:

$K((2;2),3)$: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$

P einsetzen: $(1^2 + 4^2) = 17 > 9$

Damit liegt der Punkt P außerhalb des Kreises.

Verfahren 9.17 (Schnittpunkt von Kreis und Gerade) *Das Berechnen dieses Schnittpunkts wird anhand eines Beispiels erklärt. Gegeben seien der Kreis $K((3;4),2)$ und die Gerade $g: y = 2x + 1$. Wir stellen zunächst die Kreisgleichung auf und setzen dann die Geradengleichung ein:*

$K((3;4),2)$: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$

$g \cap k$: $(x_s - 3)^2 + (2x_s + 1 - 4)^2 = 4 \iff (x_s - 3)^2 + (2x_s - 3)^2 = 4$

$\iff x_s^2 - 6x_s + 9 + 4x_s^2 - 12x_s + 9 = 4 \iff 5x_s^2 - 18x_s + 14 = 0$

$\iff x_s^2 - \frac{18}{5}x_s + \frac{14}{5} = 0 \iff x_{s_{1/2}} = \frac{9}{5} \pm \sqrt{\frac{81}{25} - \frac{70}{25}}$

$\iff x_{s_{1/2}} = \frac{9}{5} \pm \frac{\sqrt{11}}{5}$

Dieses Ergebnis setzen in die Geradengleichung ein und erhalten

$$y_{1/2} = 2x_{s_{1/2}} + 1 = \frac{23 \pm 2\sqrt{11}}{5}$$

Als weiteres Problem kann der Schnitt von zwei Kreisen betrachtet werden. Dies soll aber hier unterbleiben und auf die späteren Mathematik-Vorlesungen verschoben werden.

9.D Die Parabel

Bezeichnungen 9.18 (Formen der Gleichung einer Parabel)

Die Parabel kann in der einfachsten Form beschreiben werden, wenn der Scheitelpunkt $S(x_0; y_0)$ im Koordinatenursprung liegt. In diesem Fall kann sie in der Normalform angegeben werden. Immer möglich sind dagegen die Scheitelform und die allgemeine Form.

Normalform: $\bar{y} = a\bar{x}^2$

Scheitelform: $y - y_0 = a(x - x_0)^2$
 $y = y_0 + a(x - x_0)^2$

allgemeine Form: $y = ax^2 + bx + c$

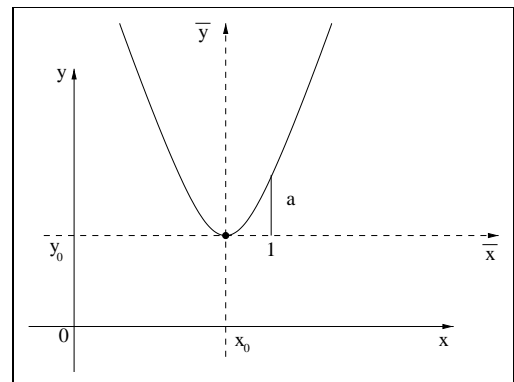


Abb. 9.8: Parabel

Bemerkung 9.19 (Umrechnung der Formen) Wir berechnen aus der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$ die Scheitelform $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, indem wir in dieser den Klammerausdruck ausrechnen

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2 = y_0 + ax^2 - 2axx_0 + ax_0^2$$

und das Ergebnis mit der allgemeinen Form vergleichen:

$$(a) \quad b = -2ax_0, \text{ damit } x_0 = \underline{\underline{-\frac{b}{2a}}}.$$

$$(b) \quad c = y_0 + ax_0^2, \text{ damit } y_0 = \underline{\underline{c - \frac{b^2}{4a}}}.$$

Der Scheitelpunkt hat damit die Koordinaten $S\left(-\frac{b}{2a}; \quad c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Beispiel 9.20

- (a) Gesucht ist die Scheitelform und die allgemeine Form der Parabel $p(x)$ mit dem Scheitel $S(2; 3)$, die durch den Punkt $P(3; 0)$ geht.

LÖSUNG: In den Ansatz der Scheitelform $p(x) = 3 + a(x - 2)^2$ setzen wir zum Bestimmen des Parameters a den Punkt P ein:

$$\begin{aligned} p(3) = 0 : \quad 0 &= 3 + a(3 - 2)^2 \\ &\Rightarrow 0 = 3 + a \\ &\Rightarrow a = -3 \end{aligned}$$

Damit lautet die Parabelgleichung in der Scheitel- und allgemeinen Form

$$p(x) = 3 - 3(x - 2)^2 = -3x^2 + 12x - 9.$$

- (b) Gesucht ist die Gleichung der Parabel durch die Punkte $P_1(-1; 2)$, $P_2(1; 3)$, $P_3(4; 20)$.

LÖSUNG: Wir stellen die Gleichung in der allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$ auf, setzen hierin die Punkte ein und lösen das System der 3 Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} (1) & 2 & = a - b + c \\ (2) & 3 & = a + b + c \\ (3) & 20 & = 16a + 4b + c \\ \hline (2) - (1) & 1 & = 2b \qquad \qquad \qquad \Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ (2) & \frac{5}{2} & = a + c \\ (3) & 18 & = 16a + c \\ \hline (3) - (2) & \frac{31}{2} & = 15a \qquad \qquad \qquad \Rightarrow a = \frac{31}{30} \end{array}$$

$$\text{in (2) :} \qquad c = \frac{5}{2} - \frac{31}{30} = \frac{44}{30} = \frac{22}{15}$$

Als Ergebnis erhalten wir somit

$$y = \frac{31}{30}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{22}{15},$$

in das wir zur Probe die Punkte P_1 , P_2 , P_1 einsetzen:

$$\begin{aligned} P_1 : \quad \frac{31}{30} - \frac{1}{2} + \frac{22}{15} &= \frac{31 - 15 + 44}{30} = 2 \quad \checkmark \\ P_2 : \quad \frac{31}{30} + \frac{1}{2} + \frac{22}{15} &= \frac{31 + 15 + 44}{30} = 3 \quad \checkmark \\ P_3 : \quad \frac{31}{30} \cdot 16 + 2 + \frac{22}{15} &= \frac{248 + 30 + 22}{15} = 20 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beispiel 9.21 (Berechnung des Scheitelpunkts) Den Scheitelpunkt können wir nach 9.19 berechnen oder die Tatsache ausnutzen, dass am Scheitelpunkt die Steigung, also die erste Ableitung, null ist.

(a) Berechnung des Scheitelpunkts mit 9.19:

$$\begin{aligned} \text{Scheitelpunkt : } & S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) = S\left(-\frac{1 \cdot 30}{2 \cdot 2 \cdot 31}; \frac{22}{15} - \frac{30}{4 \cdot 4 \cdot 31}\right) \\ & = S\left(-\frac{15}{62}; \frac{4 \cdot 44 \cdot 31 - 15^2}{15 \cdot 2 \cdot 31 \cdot 4}\right) \\ & = S\left(-\frac{15}{62}; \frac{5231}{3720}\right) \\ \text{Näherung: } & S(-0.242; 1.406) \end{aligned}$$

(b) Berechnung des Scheitelpunkts mit Hilfe der 1. Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 & = p'(x) = \frac{31}{15}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \underline{\underline{-\frac{15}{62}}} \\ p\left(-\frac{15}{62}\right) & = \frac{31}{30} \cdot \frac{15^2}{62^2} - \frac{15}{124} + \frac{22}{15} = \frac{15}{2 \cdot 2 \cdot 62} - \frac{15}{124} + \frac{22}{15} = \frac{15^2 - 15 \cdot 30 + 22 \cdot 248}{15 \cdot 248} \\ & = \frac{5231}{\underline{\underline{3720}}} \end{aligned}$$

Wann besitzt eine Parabel Nullstellen? Ist sie nach oben ge6ffnet ($a > 0$), so muss der Scheitelpunkt auf oder unterhalb der x-Achse liegen, ist sie nach unten offen, so muss er auf oder 6ber der x-Achse liegen. Nach (9.19) gilt also

$$\begin{aligned} a > 0 : \quad c - \frac{b^2}{4a} &\leq 0 \Leftrightarrow 4ac \leq b^2 \\ a < 0 : \quad c - \frac{b^2}{4a} &\geq 0 \Leftrightarrow 4ac \leq b^2 \end{aligned}$$

Wir haben jeweils die Ungleichung mit $4a$ multipliziert und ber6cksichtigt, dass bei einer Multiplikation mit einer negativen Zahl die Ordnungsrelation umgekehrt wird. In beiden Fällen haben wir also die gleiche Bedingung und es gilt

Regel 9.22 (Nullstellen einer Parabel) *Eine Parabel $p(x) = ax^2 + bx + c$ besitzt genau eine Nullstelle, wenn $4ac = b^2$ ist. Gilt $4ac < b^2$, so hat sie zwei Nullstellen.*

§ 10 Vektorrechnung

10.A Pfeile und Vektoren, Rechengesetze

Beispiel 10.1 (Skalare und nicht-skalare Größen)

- (a) Masse, Temperatur, Zeit, Arbeit, Widerstand sind *skalare Größen*.
- (b) Fahrtrichtung, Windrichtung geben eine *Richtung (und Orientierung)* an.
- (c) Fahrzeuggeschwindigkeit, Windgeschwindigkeit, Kraft, Spannung beinhalten *Betrag und Richtung*.

Die Angabe der Richtung beinhaltet die Orientierung. In der Ebene wird die Richtung durch einen Winkel aus $[0, 2\pi)$ oder $[0^\circ, 360^\circ)$ angegeben.

Definition 10.2 (Pfeil) Ein Pfeil ist eine gerichtete Strecke im Raum. Der Pfeil \vec{a} hat einen Anfangspunkt $AP(\vec{a})$ und einen Endpunkt $EP(\vec{a})$.

Ist in der Anwendung der Anfangspunkt von Bedeutung?

Bemerkung 10.3 (gebundener, linienflüchtiger, freier Pfeil)

- (a) *Elektrisches Feld, Schwerfeld*: Jeder Punkt des Raums erhält einen Pfeil, der in Betrag, Richtung und Orientierung der Feldstärke entspricht: *gebundener Pfeil*.
- (b) *Kraft auf starren Körper*: Die Wirkung der Kraft ändert sich nicht, wenn der Angriffspunkt auf der Wirkungslinie der Kraft verschoben wird: *linienflüchtiger Pfeil*.
- (c) *Translation*: Diese Größe ist für alle Punkte eines Körpers gleich: *freier Pfeil*.
- (d) *Winkelgeschwindigkeit*: Diese Größe ist bei der Rotation eines starren Körpers für alle Punkte gleich: *freier Pfeil*, dessen Richtung durch die Rotationsachse und dessen Länge durch den Betrag der Winkelgeschwindigkeit festgelegt ist.

Freie Pfeile gleichen Betrags, gleicher Richtung und gleicher Orientierung werden als gleich betrachtet:

Definition 10.4 (Vektor)

- (a) Ein Vektor ist eine Klasse von Pfeilen, deren Betrag und Richtung gleich sind.
- (b) *Schreibweise*: Vektoren werden durch einen Pfeil über dem Buchstaben gekennzeichnet: $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{v}, \vec{w}, \vec{F}, \vec{M}, \vec{\sigma}, \vec{\omega}$.
- (c) *Alternative Schreibweise*: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{F}, \mathbf{M}, \sigma, \omega$.
- (d) Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} heißen gleich ($\vec{a} = \vec{b}$), wenn Sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.
- (e) Der Länge eines Vektors \vec{a} wird mit $\|\vec{a}\| = a$ bezeichnet, zum Teil auch mit $|\vec{a}|$.

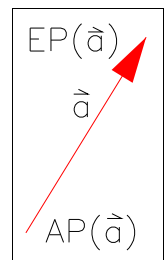


Abb. 10.1:
Vektor

Vektoren werden durch Vertreter ihrer Pfeilklasse veranschaulicht. Anwendungsbezogen werden Vektoren wie Pfeile unterschieden: *gebunden, linienflüchtig, frei*.

Definition 10.5 (Spezielle Vektoren)

- (a) Nullvektor $\vec{0}$: $\|\vec{0}\| = 0$; Richtung beliebig.
- (b) Einheitsvektor: Vektor der Länge 1. Schreibweise: $\hat{e}_{\vec{a}} = \hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ ist Einheitsvektor zu \vec{a} .
- (c) Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$: Repräsentant eines Vektors, der von einem festen Anfangspunkt O (Koordinatensprung) ausgeht. Alle Ortsvektoren haben diesen gemeinsamen Anfangspunkt. ($\vec{0} = \overrightarrow{OO}$)

Definition 10.6 (Addition von Vektoren: Parallelogrammgesetz) Vektoren \vec{a} und \vec{b} werden addiert, in dem der Anfangspunkt von \vec{b} in den Endpunkt von \vec{a} gesetzt wird. Dann ist $\vec{a} + \vec{b}$ der Vektor, dessen Anfangspunkt gleich dem Anfangspunkt von \vec{a} und dessen Endpunkt gleich dem Endpunkt von \vec{b} ist: Für $EP(\vec{a}) = AP(\vec{b})$ ist $AP(\vec{a} + \vec{b}) = AP(\vec{a})$ und $EP(\vec{a} + \vec{b}) = EP(\vec{b})$.

Die Addition von Vektoren entspricht der Addition von Kräften. Die unterbrochenen Linien stellen nochmals die Vektoren \vec{a} und \vec{b} dar und ergänzen das Dreieck zu einem Parallelogramm. Dies zeigt die Kommutativität der Vektoraddition: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Definition 10.7 (Inverser Vektor und Subtraktion von Vektoren)

- (a) Der zum Vektor \vec{a} inverse Vektor $-\vec{a}$ hat gegenüber \vec{a} Anfangs- und Endpunkt vertauscht: $AP(-\vec{a}) = EP(\vec{a})$ und $EP(-\vec{a}) = AP(\vec{a})$.
- (b) Der Vektor \vec{b} wird vom Vektor \vec{a} subtrahiert, in dem \vec{a} und $-\vec{b}$ addiert werden: $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$. (Für $EP(\vec{a}) = EP(\vec{b})$ ist $AP(\vec{a} - \vec{b}) = AP(\vec{a})$ und $EP(\vec{a} - \vec{b}) = AP(\vec{b})$.)

Definition 10.8 (Skalarmultiplikation) Sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und \vec{a} ein Vektor. Dann ist

- (a) $r\vec{a}$ ein Vektor mit der Richtung von \vec{a} und dem r -fachen Betrag von \vec{a} : $\|r\vec{a}\| = r\|\vec{a}\|$.
- (b) $(-r)\vec{a}$ der zu $r\vec{a}$ inverse Vektor: $(-r)\vec{a} = -(r\vec{a})$.

Für $r \in \mathbb{R}_{< 0}$ ist $r\vec{a}$ ein Vektor mit zu \vec{a} umgekehrter Orientierung und $(-r)$ -fachem Betrag von \vec{a} : $r\vec{a} = -((-r)\vec{a})$

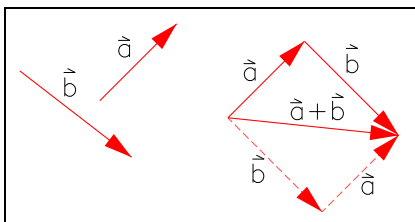


Abb. 10.2: Vektoraddition

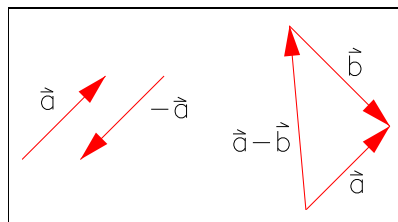


Abb. 10.3: Vektorsubtraktion

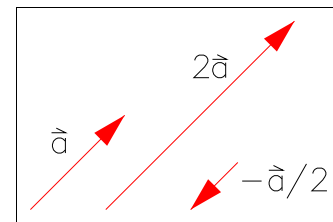


Abb. 10.4: Skalarmultiplikation

Bemerkung 10.9 Für einen Vektor \vec{a} und einer reellen Zahl r gelten:

- (a) $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$ (b) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$ (c) $0\vec{a} = \vec{0}$
 (d) $1\vec{a} = \vec{a}$ (e) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ (f) $(-r)\vec{a} = -(r\vec{a})$
 (g) $\|r\vec{a}\| = |r|\|\vec{a}\|$

Definition 10.10 (Kollinearität) Zwei Vektoren heißen kollinear, genau dann wenn ihre Wirkungslinien parallel sind: \vec{a}, \vec{b} kollinear: $\iff \exists r \in \mathbb{R} : \vec{a} = r\vec{b} \vee \vec{b} = r\vec{a}$

Kollineare Vektoren sind richtungsgleich oder parallel mit entgegengesetzter Richtung.

Beispiel 10.11 Das zweite Newtonsche¹ Gesetz lautet $\vec{F} = m\vec{a}$. Damit sind die Kraft \vec{F} und die Beschleunigung \vec{a} kollinear, ja sogar gleich orientiert, denn die Masse m ist immer positiv.

¹Sir Isaac Newton, engl. Physiker, Mathematiker, Astronom, Alchemist, Philosoph und Verwaltungsbeamter, 1642/43 (Woolsthorpe) - 1727 (Kensington)

Definition 10.12

\mathbb{E}^2 : Menge aller ebenen Vektoren.

\mathbb{E}^3 : Menge aller räumlichen Vektoren.

Ohne wirkliche Bedeutung ist \mathbb{E}^1 , die Menge aller Vektoren auf einer Geraden. Diese sind alle kollinear.

Ich fasse die Eigenschaften der Vektoroperationen zusammen. Diese Regeln sind in der Mathematik sehr wichtig, da es viele Anwendungen der Vektorrechnung gibt, in denen dann diese Regeln gelten. Sie werden unter dem Begriff Vektorraumgesetze zusammengefasst.

Mehrfache Allquantoren über derselben Menge werden abgekürzt: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V : \iff \forall \vec{a} \in V \forall \vec{b} \in V \forall \vec{c} \in V$.

Satz 10.13 (Vektorraumgesetze) V bezeichne die Menge aller ebenen oder räumlichen Vektoren, „+“ die Vektoraddition und „ \cdot “ die Skalarmultiplikation. $(V, +, \cdot)$ hat folgende Eigenschaften:

(a) Gesetze der Vektoraddition:

$$(a1) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} \in V \quad (V \text{ ist abgeschlossen unter } +)$$

$$(a2) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (+ \text{ ist assoziativ})$$

$$(a3) \quad \exists \vec{0} \in V \forall \vec{a} \in V : \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{neutrales Element: Nullvektor})$$

$$(a4) \quad \forall \vec{a} \in V \exists \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \quad (\text{inverses El.: inv. Vektor } \vec{b} := -\vec{a})$$

$$(a5) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (+ \text{ ist kommutativ})$$

(b) Gesetze der Skalarmultiplikation:

$$(b1) \quad \forall r \in \mathbb{R} \forall \vec{a} \in V : r \vec{a} \in V \quad (V \text{ ist abgeschlossen unter } \cdot)$$

$$(b2) \quad \forall \vec{a} \in V : 1 \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{Einsgesetz})$$

$$(b3) \quad \forall r, s \in \mathbb{R} \forall \vec{a} \in V : (r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a} \quad (\cdot \text{ ist distributiv über } +)$$

$$(b4) \quad \forall r \in \mathbb{R} \forall \vec{a}, \vec{b} \in V : r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b} \quad (\cdot \text{ ist distributiv über } +)$$

$$(b5) \quad \forall r, s \in \mathbb{R} \forall \vec{a} \in V : (rs)\vec{a} = r(s\vec{a}) \quad (\text{Die Multiplikation reeller Zahlen und die Skalarmultiplikation sind assoziativ.})$$

Die Beweise werden durch Skizzieren der linken und rechten Seiten veranschaulicht. Beispielhaft ist (b4) mit $r = 2$ in Abb. 10.5 dargestellt. \diamond

Die hier gefundenen Eigenschaften der Vektoren spielen in der Algebra eine große Rolle. Sind alle Eigenschaften erfüllt, so nennt man die Menge mit den Verknüpfungen einen *Vektorraum*. Vektorräume treten auch bei der Lösung technischer Probleme häufig auf: Lösungen von Differentialgleichungen, Schwingungsanalyse, Fouriertransformation in der Mess- und Regelungstechnik und andere.

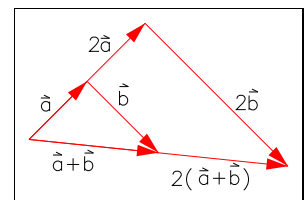


Abb. 10.5: Distributivgesetz

10.B Kartesische Koordinaten und Komponentendarstellung

Definition 10.14 (Koordinatensystem) Ein Koordinatensystem besteht aus

- dem Ursprung und
- unabhängigen Achsen mit Längeneinteilung (Basisvektoren).

Die Achsen schneiden sich im Ursprung. Wir benutzen nur kartesische Koordinatensysteme:

- Die Achsen sind Geraden.
- Die Achsen stehen senkrecht zueinander.
- Die Längeneinheit auf den Achsen ist Eins.

Die Einheitsvektoren dieser Achsen heißen Basisvektoren. Dieser Begriff wird später genauer festgelegt. Mit \hat{e}_x , \hat{e}_y und \hat{e}_z bezeichnen wir die Einheitsvektoren in x -, y - und z -Richtung. Dann sind $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ eine Basis des \mathbb{E}^2 und $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ eine Basis des \mathbb{E}^3 . Sie heißen kanonische Basen.

Diese Vektoren bilden immer ein Rechtssystem, ihre Richtungen sind festgelegt durch die Drei-Finger-Regel der rechten Hand: Der Daumen zeigt in Richtung \hat{e}_x , der Zeigefinger in Richtung \hat{e}_y und der Mittelfinger in Richtung \hat{e}_z (in \mathbb{E}^3).

Beispiele sind in den Abb. 10.6 - 10.8 enthalten.

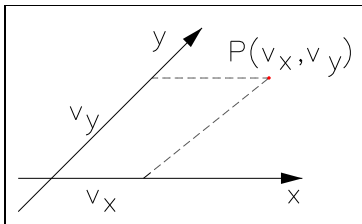


Abb. 10.6: Nicht-kartesisches Koordinatensystem

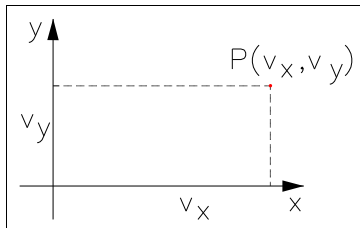


Abb. 10.7: Kartesisches Koordinatensystem

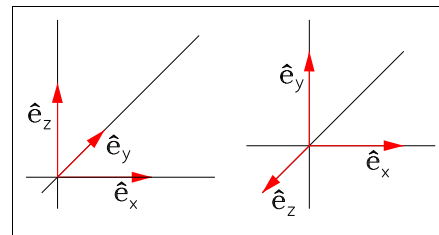


Abb. 10.8: Basisvektoren

Bezeichnungen 10.15 (Darstellung eines Ortsvektors) Der Ortsvektor \vec{v} zum Punkt $P(v_x; v_y)$ mit der x -Koordinaten v_x und der y -Koordinaten v_y hat die Darstellung $\vec{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ mit der x -Komponente v_x und der y -Komponente v_y .

Bemerkung 10.16

- (a) Für die Darstellung der Komponenten wurde hier der *Spaltenvektor* gewählt. Eine andere Darstellungsmöglichkeit wäre der *Zeilenvektor* (v_x, v_y) . Zwischen diesen Darstellungen gibt es keine inhaltlichen Unterscheidungen, man muss sich aber für das formelmäßige Ausdrücken von Zusammenhängen, vor allem in der Matrizenrechnung, auf eine Darstellungsart festlegen. Den Übergang von einem Zeilenvektor zu einem Spaltenvektor und umgekehrt nennt man *Transponieren*:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}^T = (v_x, v_y) \quad \text{und} \quad (v_x, v_y)^T = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

- (b) Wählt man zwei nicht-kollineare Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 , so spannt auch $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ die Ebene \mathbb{E}^2 auf. Bezogen auf diese Basis B hat ein Vektor \vec{v} eine andere Komponentendarstellung als bezüglich $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$. Daher muss die Basis bei der Komponentendarstellung angegeben werden. Ist $\vec{v} = \alpha_1 \hat{e}_x + \alpha_2 \hat{e}_y = \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2$, so gilt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_\wedge = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_B.$$

Beim Arbeiten mit der Komponentenschreibweise muss eine feste Basis gewählt werden, oder vor der Berechnung Umrechnungen zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen durchgeführt werden.

Die Komponentenschreibweise bietet eine einfache Möglichkeit, Vektoren anzugeben. Wie werden in dieser Notation die Vektoroperationen Addition und Skalarmultiplikation ausgerechnet?

Satz 10.17 (Vektoraddition und Skalarmultiplikation in Komponentenschreibweise)

$$\begin{aligned} (a) \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} &= (a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z) + (b_x \hat{e}_x + b_y \hat{e}_y + b_z \hat{e}_z) \\ &= a_x \hat{e}_x + b_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + b_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z + b_z \hat{e}_z \\ &= (a_x + b_x) \hat{e}_x + (a_y + b_y) \hat{e}_y + (a_z + b_z) \hat{e}_z = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Berechnung nutzt die Kommutativität der Vektoraddition (a5) aus. In Komponentendarstellung werden Vektoren also komponentenweise addiert werden.

(b)

$$r \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = r (a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z) = r a_x \hat{e}_x + r a_y \hat{e}_y + r a_z \hat{e}_z = \begin{pmatrix} r a_x \\ r a_y \\ r a_z \end{pmatrix}$$

Diese Berechnung nutzt die Distributivität der Skalarmultiplikation über die Vektoraddition (b4) aus. In Komponentendarstellung werden Vektoren skalar multipliziert, indem jede Komponente mit der Skalaren multipliziert wird.

Beispiel 10.18

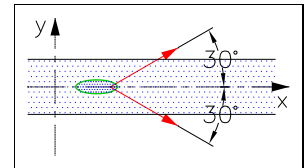
- (a) Ein Floß oder ein Schiff werden vom Ufer beidseitig mit der Kraft 2 kN unter einem Winkel von 30° gezogen. Wie groß ist die auf das Schiff wirkende Kraft?

In dem in der Skizze angegebenen Koordinatensystem gelten:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 \cos(30^\circ) \\ 2 \sin(30^\circ) \end{pmatrix} \text{ kN} = 2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ kN} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

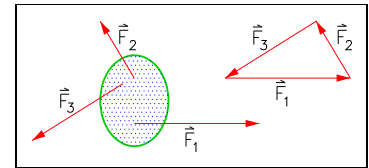
$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 2 \cos(-30^\circ) \\ 2 \sin(-30^\circ) \end{pmatrix} \text{ kN} = 2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ kN} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ kN} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ kN} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN} = 2\sqrt{3} \hat{e}_x \text{ kN}$$



Auf das Schiff wirkt also ein Kraft von $2\sqrt{3}$ kN in Flussrichtung.

- (b) Ein starrer Körper erfährt keine Translation oder bewegt sich gleichmäßig, wenn die vektorielle Summe aller Kräfte gleich dem Nullvektor ist.

**10.C Ebene Polarkoordinaten**

Wie in 9.4 für Punkte in der Ebene führen wir die Darstellung von ebenen Vektoren in Polarkoordinaten ein.

Definition 10.19 ((Ebene) Polarkoordinaten) Ein Punkt $P(v_x; v_y)$ der Ebene wird durch seinen Abstand r vom Ursprung und seinen Argumentwinkel φ eindeutig festgelegt. r und φ werden als (ebene) Polarkoordinaten bezeichnet. Hierbei bedeuten:

- Argumentwinkel eines Punktes in der Ebene: Winkel zwischen der positiven x -Achse und der Halbgeraden vom Ursprung zu diesem Punkt, gemessen in mathematisch positiver Richtung.
- mathematisch positive Richtung: von der positiven x -Achse (auf dem kürzesten Wege) zur positiven y -Achse.

Der Argumentwinkel ist auf einem Strahl vom Ursprung konstant, der Abstand auf einem Kreis um den Ursprung. Damit sind die „Koordinatenachsen“ der Polarkoordinaten nicht mehr geradlinig. Es gelten daher viele Eigenschaften der Vektorrechnung für kartesischen Koordinatensysteme nicht mehr, zum Beispiel die komponentenweise Addition von Vektoren (s. 10.17).

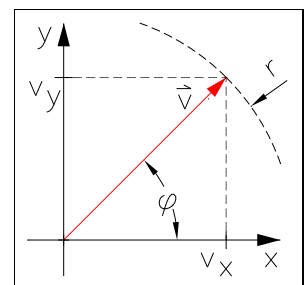


Abb. 10.9: Ebene Polarkoordinaten

Regel 10.20 (Umrechnung zwischen kartesischen und polaren Koordinaten)

- (a) Ist \vec{v} polar gegeben durch Betrag r und Argumentwinkel φ , so lauten seine kartesischen Komponenten $v_x = r \cos(\varphi)$ und $v_y = r \sin(\varphi)$. Es gilt $\vec{v} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

- (b) Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ kartesisch gegeben, so ist sein Betrag $r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Für seinen Argumentwinkel φ gilt, sofern $v_x \neq 0$ ist, $\tan(\varphi) = v_y/v_x$. Da die Tangensfunktion auf $[0, 2\pi)$ nicht injektiv ist, kann diese Gleichung zur Berechnung des Argumentwinkels φ nicht direkt umgekehrt werden. Die genaue Berechnung des Argumentwinkels wird in der Argumentfunktion $\arg : \mathbb{E}^2 \rightarrow [0, 2\pi)$ wie in 9.5 zusammengefasst:

$$\arg(\vec{v}) = \left\{ \begin{array}{lll} \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) & v_x > 0 \quad \text{und} \quad v_y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & v_x = 0 \quad \text{und} \quad v_y > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) & v_x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & v_x = 0 \quad \text{und} \quad v_y < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) & v_x > 0 \quad \text{und} \quad v_y < 0 \\ 0 & v_x = 0 \quad \text{und} \quad v_y = 0 \end{array} \right\} \in [0, 2\pi). \quad \diamond$$

Beispiel 10.21

- (a) Der Punkt P auf der Diagonalen im ersten Quadranten mit Abstand 2 vom Ursprung hat den Ortsvektor

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(45^\circ) \\ 2 \cdot \sin(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1/\sqrt{2} \\ 2 \cdot 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- (b) Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ hat

- die Länge $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$ und
- den Argumentwinkel (er liegt im zweiten Quadranten)

$$\arg(-3, 4) = \pi + \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 2.2143 \approx 126.87^\circ. \quad \diamond$$

10.D Das Skalarprodukt

Aus der Physik ist bekannt, dass Arbeit das Produkt aus zurückgelegtem Weg und überwindener Kraft ist, falls diese Kraft konstant und parallel zum Weg wirkt. Ist letzteres nicht der Fall, so wird nur die Kraft in Richtung des zurückgelegten Weges berücksichtigt. Diese Berechnung wird in vektorieller Form hergeleitet. Wir betrachten immer die euklidische Ebene \mathbb{E}^2 oder den euklidischen Raum \mathbb{E}^3 und bezeichnen diesen mit V .

Definition und Satz 10.22 (Projektion) Wir betrachten zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} aus V . \vec{a} zerlegen wir eindeutig in eine Summe

$$\vec{a} = \vec{a}_{\vec{b}} + \vec{a}_{\vec{b}^\perp} \quad \text{mit} \quad \vec{a}_{\vec{b}} \parallel \vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{a}_{\vec{b}^\perp} \perp \vec{b}.$$

Analog zerlegen wir

$$\vec{b} = \vec{b}_{\vec{a}} + \vec{b}_{\vec{a}^\perp} \quad \text{mit} \quad \vec{b}_{\vec{a}} \parallel \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{b}_{\vec{a}^\perp} \perp \vec{a}.$$

Es gilt:

$$\|\vec{a}_{\vec{b}}\| \|\vec{b}\| = \|\vec{b}_{\vec{a}}\| \|\vec{a}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = ab \cos(\alpha).$$

(Die ersten beiden Terme sind gleich den letzten beiden.) \diamond

Definition 10.23 (Skalarprodukt) Für $\vec{a}, \vec{b} \in V$ mit $V = \mathbb{E}^2$ oder $V = \mathbb{E}^3$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \vec{a} \cdot \vec{b} := \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = ab \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})). \quad (\text{Zwei Schreibweisen})$$

Das Skalarprodukt ordnet zwei Vektoren eine reelle Zahl zu: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

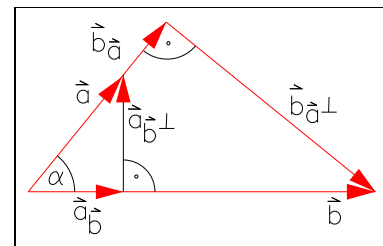


Abb. 10.10: Projektion von Vektoren

Regel 10.24 (Skalarprodukt) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und $r \in \mathbb{R}$. Es gelten:

- (a) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$, also $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$
- (b) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ (Definitheit)
- (c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Kommutativität)
- (d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (Distributivität)
- (e) $r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b})$
- (f) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp \vec{b}$
- (g) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_{\vec{b}} \cdot \vec{b} = \vec{b}_{\vec{a}} \cdot \vec{a}$
- (h) $\vec{a}_{\vec{b}^\perp} \cdot \vec{b} = 0$
- (i) $\vec{b}_{\vec{a}} = (\vec{b} \cdot \hat{a})\hat{a}$
- (j) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \angle(\vec{a}, \vec{b}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \angle(\vec{a}, \vec{b}) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

BEWEIS: (a) - (c), (e) - (h) sind klar.

- (d) Es gelten $(\vec{b} + \vec{c})_{\vec{a}} = \vec{b}_{\vec{a}} + \vec{c}_{\vec{a}}$ und im skizzierten Fall $\|\vec{b}_{\vec{a}} + \vec{c}_{\vec{a}}\| = \|\vec{b}_{\vec{a}}\| + \|\vec{c}_{\vec{a}}\|$. Damit folgt
- $$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \|\vec{a}\| \|(\vec{b} + \vec{c})_{\vec{a}}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}_{\vec{a}} + \vec{c}_{\vec{a}}\| \\ &= \|\vec{a}\| (\|\vec{b}_{\vec{a}}\| + \|\vec{c}_{\vec{a}}\|) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}_{\vec{a}}\| + \|\vec{a}\| \|\vec{c}_{\vec{a}}\| \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

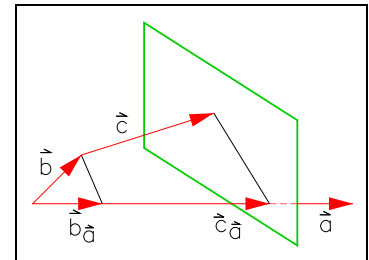


Abb. 10.11: Skalarprodukt: Distributivgesetz

- (i) Die Richtung beider Seiten ist gleich, wir berechnen ihre Länge und bezeichnen mit α den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} :
- linke Seite: $\|\vec{b}_{\vec{a}}\| = b \cos(\alpha)$,
- rechte Seite: $\|(\vec{b} \cdot \hat{a})\hat{a}\| = \|\vec{b}\| \|\hat{a}\| \cos(\alpha) \|\hat{a}\| = b \cos(\alpha)$.
- (j) Dies folgt wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ aus dem Vorzeichen der Kosinusfunktion. ◇

Regel 10.25 (Vorsicht!) Das Skalarprodukt ist nicht assoziativ: $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

BEGRÜNDUNG: Der Vektor $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ ist kollinear zu \vec{c} , der Vektor $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ zu \vec{a} .

Beispiel 10.26

- (a) **Höhensatz** ($h^2 = pq$):
Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Seiten $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und dem Lotpunkt M von C auf c . Die Seiten, Höhe und Hypothenusenabschnitte werden wie skizziert vektorisiert. Da \vec{a} und \vec{b} , \vec{p} und \vec{h} , \vec{q} und \vec{h} senkrecht aufeinander stehen und damit ihr Skalarprodukt null ist, gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{q} + \vec{h})(\vec{p} + \vec{h}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + \vec{q} \cdot \vec{h} + \vec{p} \cdot \vec{h} + \vec{h}^2 \\ &= -pq + h^2. \end{aligned}$$

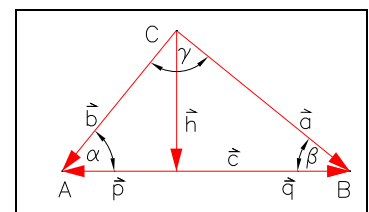


Abb. 10.12: Höhensatz

- (b) **Kosinussatz** ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$):
Mit den Bezeichnungen des obigen (nicht rechtwinkligen) Dreiecks gilt $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Wir berechnen:

$$c^2 = \vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

- (c) **Satz des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke** ($c^2 = a^2 + b^2$):
Dieser Satz folgt wegen $\gamma = \frac{\pi}{2}$ sofort aus (b).

Regel 10.27 (Skalarprodukt in kartesischen Komponenten) Wegen $\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = \hat{e}_x \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right\rangle = (a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z) \cdot (b_x \hat{e}_x + b_y \hat{e}_y + b_z \hat{e}_z) \\ &= a_x b_x \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x + a_x b_y \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y + a_x b_z \hat{e}_x \cdot \hat{e}_z + a_y b_x \hat{e}_y \cdot \hat{e}_x + a_y b_y \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y + a_y b_z \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z \\ &\quad + a_z b_x \hat{e}_z \cdot \hat{e}_x + a_z b_y \hat{e}_z \cdot \hat{e}_y + a_z b_z \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

Damit steht eine zweite Berechnungsmöglichkeit für das Skalarprodukt zur Verfügung. Diese wird ausgenutzt, um den Winkel zwischen Vektoren zu berechnen:

Regel 10.28 (Winkelberechnung)

(a) Ist $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ der Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} im \mathbb{E}^3 , so gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

(b) Für $\vec{v} \in \mathbb{E}^3$ gelten:

$$\langle \vec{v}, \hat{e}_x \rangle = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_x, \quad \langle \vec{v}, \hat{e}_y \rangle = v_y, \quad \langle \vec{v}, \hat{e}_z \rangle = v_z$$

und

$$\vec{v} \cdot \hat{e}_x = v \cos(\alpha), \quad \vec{v} \cdot \hat{e}_y = v \cos(\beta), \quad \vec{v} \cdot \hat{e}_z = v \cos(\gamma).$$

$\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ heißen Richtungskosinus. Es gelten:

$$\cos(\alpha) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\beta) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\gamma) = \frac{v_z}{v}$$

und

$$\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)} = \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{v} = 1$$

Die Summe der Quadrate der Richtungskosini ist eins.

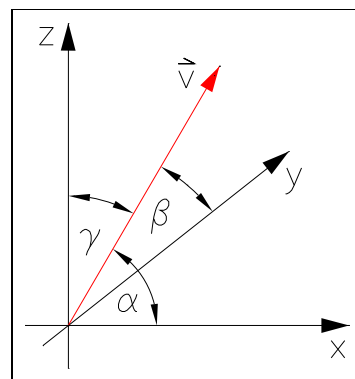


Abb. 10.13: Richtungskosinus

Beispiel 10.29

(a) Der Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ ist

$$\angle \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = \arccos \left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|} \right) = \arccos \left(\frac{19}{5 \cdot \sqrt{58}} \right) \approx 1.048 \approx 60.07^\circ.$$

(b) Der Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$ ist

$$\angle \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right) = \arccos \left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right\|} \right) = \arccos \left(\frac{-34}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{131}} \right) \approx 2.074 \approx 118.81^\circ.$$

Vektoren, die einen Winkel von 90° einschließen, heißen *orthogonal*. Dies ist genau dann der Fall, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Damit ist die Berechnung von Lotvektoren einfach:

Definition 10.30 (Lotvektoren)

(a) Zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ stehen $\begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ orthogonal. Diese sind kollinear (invers zueinander).

(b) Zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ stehen $\begin{pmatrix} 0 \\ a_z \\ -a_x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_z \\ 0 \\ -a_x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal. Diese sind komplanar. Jeder Vektor

$$\vec{v}(\lambda, \mu) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ a_z \\ -a_x \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_z \\ 0 \\ -a_x \end{pmatrix}$$

steht zu \vec{a} orthogonal.

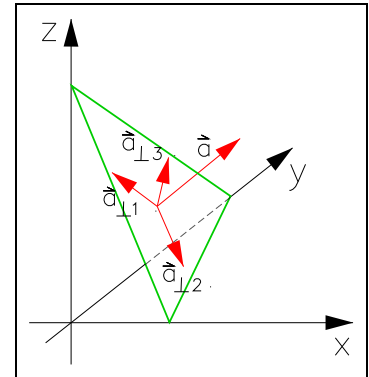


Abb. 10.14: Lotvektoren

Zur Berechnung eines Lotvektors werden zwei Komponenten vertauscht und eine davon mit -1 multipliziert. Im dreidimensionalen Fall wird die dritte auf Null gesetzt. Dann ist das Skalarprodukt des Vektors und dieses Lotvektors null.

10.E Das Kreuz- oder Vektorprodukt

Das Skalarprodukt wurde zur mathematischen Beschreibung der mechanischen Arbeit, die das Produkt aus Weg und Kraft ist, eingeführt. Es ordnet zwei Vektoren eine reelle Zahl, also eine skalare Größe, zu. Das Vektorprodukt ordnet dagegen zwei Vektoren ein Vektor zu. Die Definition, die wir hier geben werden, berücksichtigt lediglich dreidimensionale Vektoren, eine Einschränkung auf anwendungsrelevante Fälle. Als Anwendung des Vektorprodukts betrachten wir das Drehmoment.

Beispiel 10.31

- (a) Drehmoment: Welches Drehmoment bewirkt eine Kraft F , die im Punkt P angreift, auf den Ursprung des Koordinatensystems? Mit $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, dem Ortsvektor zum Punkt P (vgl. Abb. 10.15), gilt

$$D = r F \sin(\angle(\vec{r}, \vec{F})) = r F \sin(\alpha).$$

Das Drehmoment ist aber eine vektorielle Größe, die senkrecht auf der von \vec{r} und \vec{F} aufgespannten Ebene steht und entsprechend der 3-Finger-Regel der rechten Hand orientiert ist: \vec{r} , \vec{F} , und \vec{D} bilden ein Rechtssystem.

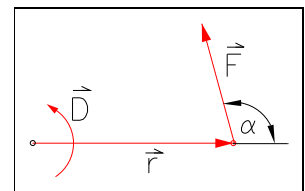


Abb. 10.15: Drehmoment

- (b) Flächeninhalt: Welchen Flächeninhalt besitzt das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Parallelogramm (s. Abb. 10.16)?

$$A = a b \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = a b \sin(\alpha)$$

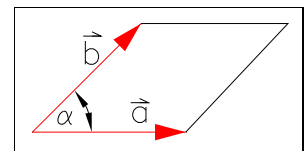


Abb. 10.16: Flächeninhalt

Diese Beispiele lassen folgende Definition des Vektorprodukts sinnvoll erscheinen:

Definition 10.32 (Vektorprodukt, Kreuzprodukt) Wir legen das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt) $\vec{a} \times \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}^3$ fest durch (vgl. Abb. 10.17)

- (a) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = ab \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$
- (b) $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} .
- (c) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem.

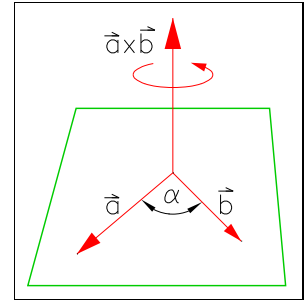


Abb. 10.17: Vektorprodukt

Regel 10.33 (Eigenschaften des Vektorprodukts) Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}^3$ und $r \in \mathbb{R}$ gelten:

- (a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_{\vec{a}^\perp} = \vec{a}_{\vec{b}^\perp} \times \vec{b}$ (vgl. Abb. 10.18)
- (b) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- (c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivität)
- (d) $(r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b}) = r(\vec{a} \times \vec{b})$

BEWEIS:

- (a) $\vec{b}_{\vec{a}^\perp}$ ist die Höhe des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms mit der Grundseite \vec{a} . Aufgrund der Flächenberechnung stimmt die erste Gleichheit betragsmäßig. Die Richtung beider Vektorprodukte stimmt überein, die Gleichheit der Orientierung folgt aus der Tatsache, dass sowohl $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ als auch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}_{\vec{a}^\perp}$ Rechtssysteme bilden.
- (b) Betragsmäßig stimmen beide Seiten überein. Wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden, dann bilden $\vec{b}, \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}$ ein Linkssystem.
- (c) 1. Schritt: $(\vec{b} + \vec{c})_{\vec{a}^\perp} = \vec{b}_{\vec{a}^\perp} + \vec{c}_{\vec{a}^\perp}$ (vgl. Abb. 10.19)
- 2. Schritt: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})_{\vec{a}^\perp} = \vec{a} \times \vec{b}_{\vec{a}^\perp} + \vec{a} \times \vec{c}_{\vec{a}^\perp}$
(Drehstreckung um 90° mit demselben Faktor, vgl. Abb. 10.19)
- 3. Schritt: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \stackrel{(a)}{=} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})_{\vec{a}^\perp} \stackrel{1.}{=} \vec{a} \times (\vec{b}_{\vec{a}^\perp} + \vec{c}_{\vec{a}^\perp}) \stackrel{2.}{=} \vec{a} \times \vec{b}_{\vec{a}^\perp} + \vec{a} \times \vec{c}_{\vec{a}^\perp} \stackrel{1.}{=} \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(d) klar ◇

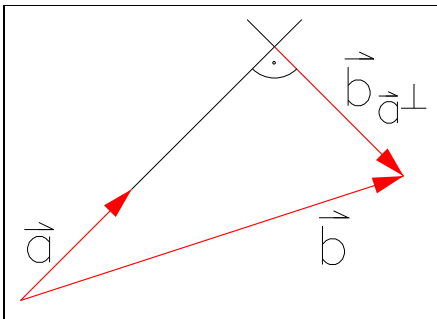


Abb. 10.18: Vektorprodukt: Orthogonaler Anteil

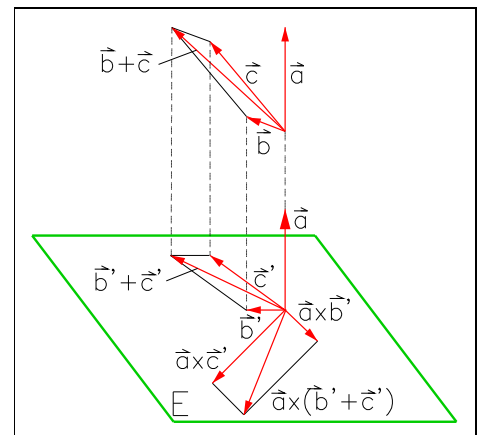


Abb. 10.19: Vektorprodukt: Distributivgesetz

Bemerkung 10.34 Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}^3$ gelten:

- (a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- (b) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$
- (c) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = ab \iff \vec{a} \perp \vec{b}$
- (d)

$$\begin{array}{lll}
 \hat{e}_x \times \hat{e}_x = \vec{0} & \hat{e}_y \times \hat{e}_x = -\hat{e}_z & \hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y \\
 \hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z & \hat{e}_y \times \hat{e}_y = \vec{0} & \hat{e}_z \times \hat{e}_y = -\hat{e}_x \\
 \hat{e}_x \times \hat{e}_z = -\hat{e}_y & \hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x & \hat{e}_z \times \hat{e}_z = \vec{0}
 \end{array}$$

(e) Für nicht-kollineare Vektoren \vec{b} und \vec{c} ($\vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0}$) gelten:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \iff \vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c}) \iff \vec{a} \in E_{\vec{b}, \vec{c}} \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind komplanar.}$$

\vec{a} steht also genau dann senkrecht auf $\vec{b} \times \vec{c}$, wenn es in der von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Ebene liegt.

(f) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \in E_{\vec{b}, \vec{c}}$: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ liegt in der von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Ebene.

BEWEIS: (a) - (e) sind klar.

(f) : Wegen $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \perp \vec{b} \times \vec{c}$ folgt aus (5) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \in E_{\vec{b}, \vec{c}}$ \diamond

Regel 10.35 (Das Vektorprodukt in kartesischen Komponenten)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

BEWEIS: Mit 10.33 ((c)), ((d)) und 10.34 ((d)) folgt

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z) \times (b_x \hat{e}_x + b_y \hat{e}_y + b_z \hat{e}_z) \\
 &= a_x b_x \hat{e}_x \times \hat{e}_x + a_x b_y \hat{e}_x \times \hat{e}_y + a_x b_z \hat{e}_x \times \hat{e}_z + a_y b_x \hat{e}_y \times \hat{e}_x + a_y b_y \hat{e}_y \times \hat{e}_y + a_y b_z \hat{e}_y \times \hat{e}_z \\
 &\quad + a_z b_x \hat{e}_z \times \hat{e}_x + a_z b_y \hat{e}_z \times \hat{e}_y + a_z b_z \hat{e}_z \times \hat{e}_z \\
 &= \vec{0} + a_x b_y \hat{e}_z - a_x b_z \hat{e}_y - a_y b_x \hat{e}_z + \vec{0} + a_y b_z \hat{e}_x + a_z b_x \hat{e}_y - a_z b_y \hat{e}_x + \vec{0}
 \end{aligned}$$

\diamond

Beispiel 10.36

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - (-3) \cdot 5 \\ (-3) \cdot (-4) - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Beispiel 10.37 (Anwendungen in der Geometrie)

(a) *Dreiecksfläche*: Die Fläche des Dreiecks $A(a_x, a_y, 0)$, $B(b_x, b_y, 0)$, $C(c_x, c_y, 0)$ kann natürlich durch direkte Berechnung ermittelt werden, das Kreuzprodukt führt aber schneller zum Ziel:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\|\vec{c} \times (-\vec{b})\|}{2} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_x - a_x \\ c_y - a_y \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \frac{|(b_x - a_x)(c_y - a_y) - (b_y - a_y)(c_x - a_x)|}{2}
 \end{aligned}$$

(b) *Sinussatz*: Die Fläche eines Dreiecks mit den Seiten a , b und c kann mit Hilfe des Kreuzproduktes auf mehrere Arten berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{2} = \frac{\|\vec{b} \times \vec{c}\|}{2} = \frac{\|\vec{c} \times \vec{a}\|}{2} \\
 &= \frac{ab}{2} \sin(\gamma) = \frac{bc}{2} \sin(\alpha) = \frac{ac}{2} \sin(\beta).
 \end{aligned}$$

Dividieren wir durch $\frac{abc}{2}$, so erhalten wir

$$\frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}.$$

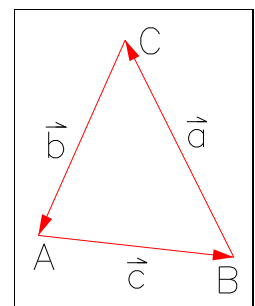


Abb. 10.20: Dreiecksfläche

Kommentare und Korrekturen zu [?]

- Bei vielen Lösungen ist der Definitionsbereich nicht angegeben, zum Beispiel:

$$14_1 \quad 1.3a) : \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-11, 0, 10\}$$

- Korrekturen:

26₁₁ Gilt nur für $a \neq 0$

$$26_{15} \quad \mathbb{L} = \begin{cases} \{0, 2a\} & b \neq 5a \wedge a \neq 0 \\ \emptyset & b \neq 5a \wedge a = 0 \\ \mathbb{D} & b = 5a \end{cases}$$

61₋₃ $p \cdot V^k = c$

84₁₈ Ersetze „grafisch“ durch „mit Hilfe einer Skizze“

89₋₈ $\cos(x + \pi/4) - \sin \dots$

94₂₁ $\dots \quad 24xy$

101 g): Im Falle $a \neq 0$ gibt es nur für $|a| > \sqrt{2}$ eine Lösung.

102₋₁ „ $\mathbb{L} =$ “ streichen, $\mathbb{L} = \mathbb{L}_I \cup \mathbb{L}_{II} = \mathbb{L}_{II}$.

103₂₂ $\{x \in \mathbb{R} \dots$

105₋₄ Es fehlt $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{\geq -2}$

105₋₃ $\dots \quad x^2 + 3x = 0 \quad \dots$

118₋₇ f): $\lg 1 = 0, \lg 4 \dots$

119_{16ff} 3.3.4: a) Mit $s_t = 0.375 \text{ cm}, s_I = 4.7 \text{ cm} \dots$

$$\dots \quad a = 10^{\frac{-2 \cdot 0.375}{4.7}} (\approx 0.6925)$$

$$\dots \quad RC = \frac{-1}{\ln(a)} = \frac{-4.7}{-2 \cdot 0.375 \cdot \ln(10)} = \frac{4.7}{0.75 \cdot \ln(10)} \approx 2.72$$

126₉ Der letzte Zähler: $2 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Abbildungsverzeichnis

3.1	Gleichgewicht	12
3.2	Ungleichgewicht	15
4.1	Betragsfunktion	19
4.2	Betragsfunktion: Grenzen	19
4.3	Betragsfunktion: Quadrate	19
5.1	Winkeldefinition	22
5.2	Sinus und Kosinus	22
5.3	Sinus und Kosinus 30°	23
5.4	Kreisfunktionen am Kreis	23
5.5	Kreis Sektor: Fläche	23
5.6	Rechtwinkliges Dreieck	26
5.7	Satz des Pythagoras	26
5.8	Höhensatz	26
5.9	Kathetensatz	28
5.10	Allgemeines Dreieck	28
5.11	Umkreis	29
5.12	Umkreis: Winkel	29
5.13	Additionssatz	29
5.14	Additionssätze	30
6.1	Sinus und Kosinus	32
6.2	Sinus und Kosinus mit halber und vierfacher Frequenz	32
6.3	Tangens und Kotangens	33
6.4	Phasenverschobene Schwingungen	35
6.5	Überlagerte Schwingung	35
7.1	Exponential- und Logarithmusfunktion	41
7.2	Millimeterpapier	43
7.3	Millimeterpapier verzerrt	43
7.4	Einfach-logarithm. Papier	44
7.5	Einfach-log. Papier, verzerrt	44
7.6	Doppelt-logarithmisches Papier	45
7.7	Doppelt-logarithmisches Papier, verzerrt	46
8.1	Parabel vierten Grades	56
9.1	Koordinatensystem	61
9.2	Abstand Punkte	61
9.3	Koordinatentransformation	63
9.4	Geradengleichung	63
9.5	Schnittpunkt	65
9.6	Schnittwinkel	65
9.7	Kreis	65

9.8	Parabel	66
10.1	Vektor	69
10.2	Vektoraddition	70
10.3	Vektorsubtraktion	70
10.4	Skalarmultiplikation	70
10.5	Distributivgesetz	71
10.6	Nicht-kartesisches Koordinatensystem	72
10.7	Kartesisches Koordinatensystem	72
10.8	Basisvektoren	72
10.9	Ebene Polarkoordinaten	73
10.10	Projektion von Vektoren	74
10.11	Skalarprodukt: Distributivgesetz	75
10.12	Höhensatz	75
10.13	Richtungskosinus	76
10.14	Lotvektoren	77
10.15	Drehmoment	77
10.16	Flächeninhalt	77
10.17	Vektorprodukt	78
10.18	Vektorprodukt: Orthogonaler Anteil	78
10.19	Vektorprodukt: Distributivgesetz	78
10.20	Dreiecksfläche	79

Stichwortverzeichnis

- Ableitung
 - erste, 1
- Abstand, 9
- Additionsregel, 2
- Änderungsrate, 2

- differenzierbar, 1

- Exponentialfunktionen, 4
- Extremstellen, 8

- Geburtenrate, 2
- Geschwindigkeit, 1

- Integration, 11

- Kettenregel, 3
- Kosinus
 - funktion, 4
- Kosinusfunktion, 4
- Kreis
 - funktionen
 - Ableitungen, 4
- kritische Stelle, 6
- kritischer Punkt, 6
- Kurvendiskussion, 6
- Kurvenverlauf, 6

- Logarithmus
 - funktion, 5

- Maximalstelle, 6
- Minimalstelle, 6
- Monom, 3

- Nullstelle, 8

- Parabel, 9
- Produktregel, 2

- Quotientenregel, 3

- Randpunkt, 1

- Sattelpunkt, 6
- Sekantensteigungen, 1
- Sinus
 - funktion, 4
- Stammfunktion, 11
 - allgemein, 11
- Steigung, 1

- Sterberate, 2
- Subtraktionsregel, 2

- Tangens
 - funktion, 4
- Tangente, 1
 - nsteigung, 1

- Umkehrfunktion, 3

- Volumenfluss, 1

- Wachstum, 1
- Wendepunkt, 7
- Wendestellen, 8
- Wendetangente, 7

- Zerfallsrate, 2